QUATRIEME COLLOQUE SUR LE

TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

Nice 7 au 12 mai 1973

LES FONCTIONS DE WALSH ET LEURS PROPRIETES SPECTRALES.

Claude CARDOT
Ingénieur en Chef des Télécommunications e.d.
CIT-ALCATEL, VILLARCEAU (91)

RESUME Une nouvelle définition des fonctions de WALSH, comme signe d'un produit de fonctions trigonometriques permet de les engendrer directement et de calculer leur spectre. On peut classer ces fonctions en classes d'équivalence diaphoniques.

Une définition polynomiale de ces mêmes fonctions permet de déterminer leurs produits de convolution et d'établir qu'il n'existe que 3^K produits de convolution distincts dans une classe contenant 2^K fonctions de WALSH.

Ces résultats théoriques sont directement applicables à l'étude de l'influence de la limitation de bande passante et de l'erreur de synchronisation sur le fonctionnement d'un multiplex à porteuses WALSH.

SUMMARY A new representation is given for WALSH functions, as the sign of an appropriate product of trigonometric functions. This allows to compute the spectrum of any WALSH function and to classifiy these in crosstalk equivalence classes.

A polynomial representation gives the way to the evaluation of correlation products between WALSH functions. It is derived that 3^K distinct correlation products only exist in a class containing 2^K WALSH functions.

These theoretical results are immediately appliable to the evaluation of crosstalk in a WALSH multiplex system.

DÉFINITION ANALYTIQUE SIMPLE DES FONCTIONS DE WALSH ET APPLICATION A LA DÉTERMINATION EXACTE DE LEURS PROPRIÉTÉS SPECTRALES *

par

Claude CARDOT

Ingénieur en chef des télécommunications (c. d.) **

RÉSUMÉ. — *L'auteur établit des formules simples et rapidement programmables permettant d'engendrer directement les fonctions de Walsh à partir du signe des fonctions trigonométriques, la seule donnée étant le rang de la fonction. Cet algorithme est utilisé pour déterminer le développement exact en série de Fourier d'une fonction de Walsh de rang quelconque. L'étude des spectres ainsi obtenus permet de caractériser numériquement les propriétés de transmission de signaux par l'intermédiaire de porteuses Walsh : on évalue l'affaiblissement et la diaphonie résultant de la limitation de la bande passante de la voie de transmission par un filtre rectangulaire. On démontre que les fonctions de Walsh peuvent être groupées en classes d'équivalence en ce qui concerne leur diaphonie mutuelle de filtrage et que toutes ces classes peuvent être décrites par la même matrice, dont les termes sont fonction de la fréquence de coupure. La matrice de diaphonie de la classe contenant 2^k fonctions possède 3^k termes distincts au signe près.*

PLAN. — I : *Introduction*, I.1. *Généralités;* I.2. *Notations.* ● II : ***Définition analytique des fonctions de Walsh*** II.1. *Décomposition en fonctions de base;* II.2. *Expression analytique des fonctions de base* II.3. *Programmation.* ● III : ***Développement en série de Fourier des fonctions de Walsh*** III.1. *Généralités;* III.2. *Théorème préliminaire;* III.3. *Calcul de la série de Fourier d'une porteuse Walsh.* ● IV : ***Application à l'étude des conséquences du filtrage sur la transmission des signaux par l'intermédiaire d'une porteuse Walsh. Classes d'équivalence et matrice universelle de diaphonie*** IV.1. *Généralités;* IV.2. *Principe du calcul;* IV.3. *Définition des classes d'équivalence diaphonique des fonctions de Walsh.* ● V : ***Etude de la matrice universelle de diaphonie; produits de convolution des fonctions de Walsh; nombre de termes distincts de la matrice de diaphonie d'une classe d'équivalence*** V.1. *Généralités;* V.2. *Représentation polynomiale des fonctions de Walsh;* V.3. *Produits de convolution des fonctions de Walsh.* VI : *Conclusion. Bibliographie* (8 réf.).

I. INTRODUCTION.

I.1. Généralités.

Les fonctions de Walsh, dérivées des matrices de Hadamard [1], suscitent un intérêt croissant dans le domaine des télécommunications, en raison de la possibilité de les produire et de les mettre en œuvre avec des dispositifs faisant appel aux technologies déjà utilisées dans les calculateurs numériques.

Les limitations de leur emploi sont essentiellement gouvernées par leurs propriétés spectrales, qui permettent de prévoir les bandes passantes nécessaires à une bonne restitution de signaux transmis par l'intermédiaire de porteuses Walsh.

Des tentatives ont déjà été faites pour :

a) obtenir une définition simplifiée et rapidement programmable d'une fonction de Walsh de rang quelconque, une fois connu ce rang, et de manière *non récursive*, c'est-à-dire sans stockage en mémoire d'aucune des fonctions précédentes. Pratt, Kane et

* La présente étude a été effectuée dans le cadre du contrat de la DIRECTION DES RECHERCHES ET MOYENS D'ESSAIS de la Délégation Ministérielle pour l'Armement, sour le n° 71.34.065.00.480.75.01, « Exploration des applications aux télécommunications des fonctions de Walsh ».

** Division des applications électroniques, CIT-ALCATEL, Marcoussis.

Andrews [2] ont mentionné une telle définition [formule (13)], qui a été explicitée par Lackey et Meltzer [3]. Ces définitions présentent les inconvénients de nécessiter une conversion du rang de la fonction en code binaire réfléchi et de ne pas reposer sur une preuve rigoureuse, comme l'indiquent les derniers auteurs en fin d'article ;

b) caractériser exactement leurs propriétés spectrales. Ceci a notamment été exposé par H. H. Schreiber [4], au moyen d'une suite d'approximations.

Nous proposons dans la présente étude une définition analytique simple, non récursive, basée sur des fonctions de Rademacher décalées, laquelle définition permet d'aboutir au calcul exact de la série de Fourier d'une fonction de Walsh indéfiniment répétée (porteuse Walsh).

Les résultats obtenus permettent une évaluation numérique précise de l'affaiblissement et de la diaphonie résultant de la limitation de la bande transmise, dans le cas d'un multiplex, avec des porteuses Walsh.

On montre que les fonctions de Walsh peuvent être groupées, au point de vue de la diaphonie, en classes, toutes isomorphes, et l'on étudie, au dernier chapitre, la matrice universelle qui décrit toutes ces classes. Le code binaire réfléchi est introduit dans cette dernière partie, avec une justification rigoureuse.

I.2. Notations.

I.2.1. Le mot *simple* s'entend ici au sens de la langue courante et ne définit aucune propriété mathématique particulière.

I.2.2. Les fonctions de Walsh sont usuellement définies sur un intervalle ouvert $]-T/2, T/2[$, la variable réduite décrivant cet intervalle s'appelant : $\theta = t/T$ et décrivant, par conséquent, l'intervalle ouvert $]-1/2, 1/2[$. Ce sont notamment les notations que l'on trouve dans l'ouvrage de base de H. F. Harmuth [5].

Pour simplifier la définition par l'intermédiaire de séries de Fourier, nous normaliserons l'intervalle ouvert de définition des fonctions de Walsh à : $]-\pi, \pi[$ et nous appellerons : x la variable réduite qui décrit cet intervalle. On a donc : $x = 2\pi\theta$.

I.2.3. Nous écrirons en outre :

$W(N, x)$ = fonction de Walsh de rang N, définie de $x = -\pi$ à $x = \pi$;

N = *rang* de la fonction de Walsh ($N = 0, 1, \dots 2^k - 1$, pour le groupe des 2^k premières fonctions de Walsh ordonnées par séquences croissantes) ;

s = *séquence* = $N/2$ si N est pair et $(N + 1)/2$ si N est impair (c'est donc $N/2$ *arrondi à l'entier supérieur*) ;

$i = -2^{k-1} + 1, \dots 0, 1, \dots 2^{k-1}$ un *indice entier* prenant 2^k valeurs et énumérant les intervalles successifs dont se compose une fonction de Walsh (la moitié droite de la fonction est énumérée par les valeurs : $1, 2, \dots 2^{k-1}$ de i). Cet indice est défini modulo 2^k, pour une porteuse Walsh ;

$2i - 1$: *indice impair* énumérant les mêmes intervalles en prenant les valeurs successives :

$-2^k + 1, -2^k + 3, \dots, -1, +1, +3, \dots 2^k - 1$;

$W_N(i)$: *valeur* ($+1$ ou -1) de la N^e fonction de Walsh sur l'intervalle n° i ;

n : *rang de l'harmonique* dans la série de Fourier d'une porteuse Walsh ;

a_j : entier égal à 0 ou 1 dans la *décomposition binaire de* N, c'est-à-dire que l'on a :

$$N = \sum_j a_j \, 2^{j-1}, \; j = 1, \dots k - 1 ;$$

j_0 : rang du premier élément binaire non nul dans l'expression binaire de N, à partir de la droite ;

k_0 : rang du premier élément binaire non nul dans l'expression binaire de s, à partir de la droite ;

$\oplus$ = *somme directe*, symbole de l'addition de deux nombres écrits dans le système binaire, les éléments binaires de même rang étant ajoutés modulo 2 et sans retenue ;

$$\text{sal}\ (s,\ x) = \text{W}\ (2\,s - 1,\ x),$$
$$\text{cal}\ (s,\ x) = \text{W}\ (2\,s,\ x),$$

sgn (y) = *signe de* y : fonction égale à $+1$ si $y > 0$, à -1 si $y < 0$, discontinue pour $y = 0$.

Toutes les figures et tableaux du présent article se rapportent (sauf la figure 6) au cas : $k = 5$ (groupe des 32 premières fonctions de Walsh).

$\underset{c}{+}$ = *C — addition*. Symbole de l'addition de deux nombres *binaires* ayant le même nombre d'éléments, pour obtenir un nombre *ternaire* ayant ce même nombre d'éléments, les règles étant : $1 \underset{c}{+} 1 = +1$; $1 \underset{c}{+} 0 = 0 \underset{c}{+} 1 = 0$; $0 \underset{c}{+} 0 = -1$.

II. DÉFINITION ANALYTIQUE DES FONCTIONS DE WALSH

II.1. Décomposition en fonctions de base.

On sait ([5], § I.1.4.) qu'il existe au signe près une manière et une seule d'ordonner les fonctions de Walsh selon le nombre croissant de leurs passages par zéro sur l'intervalle de définition *supposé ouvert*. Les fonctions de Walsh étant ainsi ordonnées, et en définissant le signe de chaque fonction par la condition d'être le signe + sur l'intervalle $i = 1$, le théorème fondamental :

$$\text{(1)} \qquad \text{W}(J,\ x)\ \text{W}(K,\ x) = \text{W}(J \oplus K,\ x)\,,$$

est valable (Fig. 1).

L'opération $\oplus$ définissant un groupe abélien, la recherche d'un ensemble minimal simple permettant de définir par multiplication toutes les fonctions de Walsh se ramène à celle d'un ensemble minimal simple de générateurs dudit groupe.

Une base particulièrement simple pour l'opération $\oplus$ est constituée par les *indices n'ayant qu'un seul élément binaire égal à 1.* Pour ces indices, l'*addition directe coincide avec l'addition ordinaire* et peut donc être aisément programmée. Nous écrirons donc, par exemple : 10011 = 10000 + 00010 + 00001 (le signe + pouvant être écrit au lieu de $\oplus$), et nous obtiendrons la fonction de Walsh, dont le numéro est, en binaire : N = 10011, en faisant le produit des (k au maximum) fonctions de base, correspondant aux éléments binaires qui figurent dans N, et prises dans la série :

$$u_1 = \mathrm{W}\ (00001,\ x)$$
$$u_2 = \mathrm{W}\ (00010,\ x)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_k = \mathrm{W}\ (10000,\ x)$$

La fonction u_1 = sal (1, x) est la fonction de Rademacher d'ordre unité (fonction impaire). Avec les

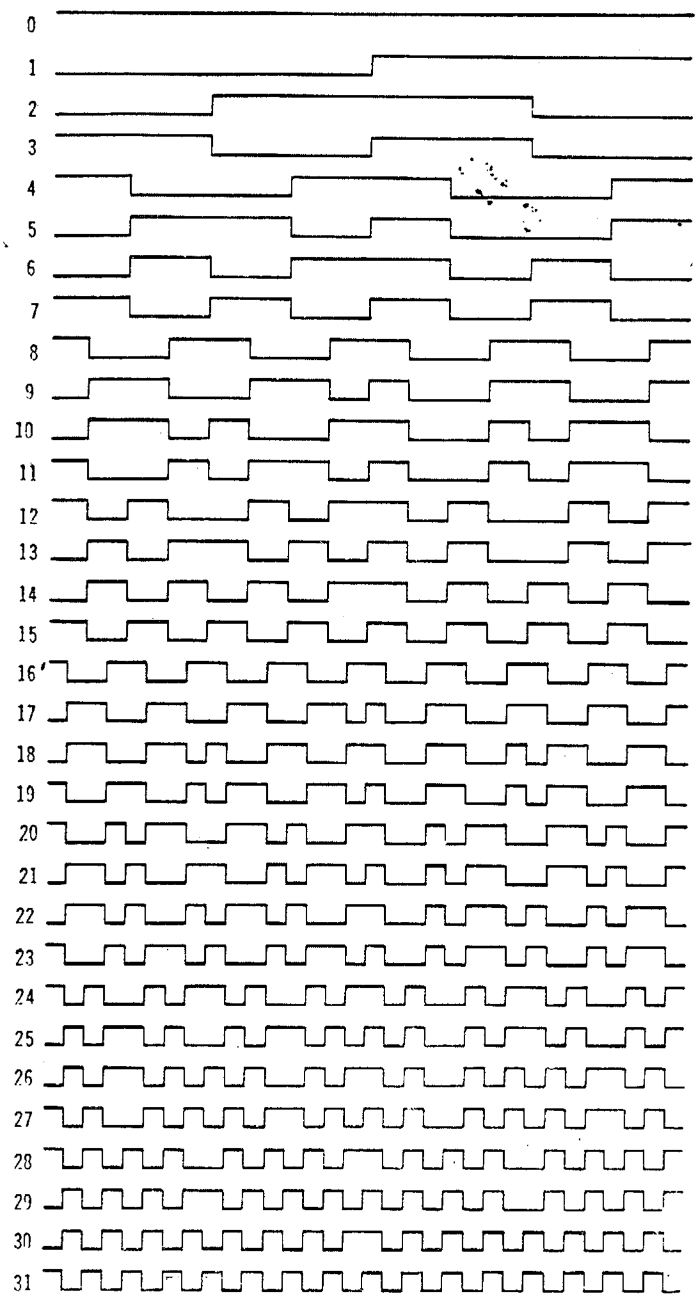


FIG. 1. — Les 32 premières fonctions de Walsh.

présentes notations, les fonctions de Rademacher sont :

$$\mathrm{sal}\,(1\,,x) = \mathrm{R}(1\,,x) = \begin{array}{l} -1,\ \text{pour}\quad -\pi < x < 0\,, \\ +1,\ \text{pour}\qquad 0 < x < \pi\,, \end{array}$$

$$\mathrm{R}(p\,,x) = \mathrm{R}(1, 2^{p-1} \cdot x)$$

Les fonctions u_p pour $p > 1$ sont égales à $\mathrm{W}(2^{p-1}, x)$ ou cal $(2^{p-2}, x)$ et ce sont des fonctions qui *dérivent de la fonction de Rademacher d'ordre* p — 2 *par un décalage cyclique* (qui les transforme de fonctions impaires en fonctions paires).

Ce décalage cyclique est de $\pi/2^p$ pour la fonction de Rademacher $\mathrm{R}(p, x) = \mathrm{sal}\ (2^{p-1}, x)$.

Nous voyons donc qu'un algorithme simple n'utilisant que l'addition ordinaire permet, à partir de la décomposition binaire du rang N, d'aboutir à engendrer toute fonction de Walsh en multipliant des fonctions de Rademacher décalées (sauf la première) :

si $N = \sum a_j\, 2^{j-1}$, $(a_j = 0$ ou $1)$, on aura :

$$\mathrm{W}(N\,,x) = \prod_{j,\,a_j \neq 0} u_j\,, \tag{2}$$

le produit ne comportant que les facteurs correspondant aux indices j pour lesquels : $a_j = 1$.

II.2. Expression analytique des fonctions de base.

Pour exploiter la formule (2), il suffit de mettre sous une forme analytique simple les fonctions périodiques u_j :

On a :

$$\begin{aligned} u_1 &= \mathrm{sgn}\ (\sin x) = \mathrm{sgn}\ [\cos\,(x - \pi/2)]\,, \\ u_2 &= \mathrm{sgn}\ (\cos x)\,, \\ u_3 &= \mathrm{sgn}\ (\cos 2\,x)\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_k &= \mathrm{sgn}\ [\cos 2^{k-2}\,x]\,, \end{aligned} \tag{3}$$

ces formules résultant immédiatement de l'identification des fonctions u_j aux fonctions de Rademacher décalées.

Nous remarquerons, d'autre part, pour simplifier les formules et la programmation :

a) que l'opération sgn ( ) commute avec la multiplication ;

b) que cos 0 est égal à + 1,

Ce qui nous permet de mettre la formule (2) sous la forme générale :

$$\text{(4)} \quad \mathrm{W}(N\,,x) = \operatorname{sgn}\left[\cos a_1\,(x - \pi/2)\prod_{j=2}^{j=k}\cos\,(a_j\,2^{j-2}\,x)\right]$$

les a_j valant 1 si l'élément binaire de ce rang figure dans N, écrit en système binaire, et 0 s'il n'y figure pas. (Le premier facteur vaut soit sin x, soit 1, selon qu'il s'agit d'une fonction de Walsh impaire [sal] ou paire [cal]).

Pour une programmation aisée de la formule (4), il est souhaitable d'éviter les points de discontinuité de la fonction sgn ( ) et il est suffisant de définir W(N, x) sur chacun des intervalles successifs où cette fonction demeure constante. En introduisant les indices entiers i et $2\,i - 1$ définis au § I.2.3. nous pouvons écrire :

$$\text{(5)} \quad \begin{aligned} u_1 &= \operatorname{sgn}\,[\sin\,(2\,i - 1)\,\pi/2\ ] \\ &= \operatorname{sgn}\,[\cos\,(2\,i - 1)\,\pi/2^k - \pi/2)]\ , \\ u_2 &= \operatorname{sgn}\,[\cos\,2\,(2\,i - 1)\,\pi/2^{k+1}]\ , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_k &= \operatorname{sgn}\,[\cos\,2^{k-1}\,(2\,i - 1)\,\pi\ \ 2^{k+1}]\ ; \end{aligned}$$

et :

$$\text{(6)} \quad \mathrm{W}_N(i) = \operatorname{sgn}\left[\cos a_1\,((2\,i - 1)\,\pi/2^k - \pi/2) \times \prod_{j=2}^{j=k}\cos\,(a_j\,2^{j-1}\,(2\,i - 1)\,\pi/2^{k+1})\right]$$

II.3. Programmation.

La formule (6) permet de calculer, *sans aucun stockage préalable*, la valeur d'une fonction de Walsh de rang donné N, à partir de la décomposition binaire de N. Elle permet donc de réaliser de substantielles économies de mémoire dans tout calcul où interviennent les fonctions de Walsh, pourvu que le calculateur dispose (ce qui est le cas général) de sous-programmes trigonométriques.

C'est en particulier en utilisant cette formule que les trente-deux premières fonctions de Walsh représentées figure 1 ont été tracées avec une calculatrice de bureau ayant une mémoire inférieure à 1 000 octets (*).

La figure 2 est l'organigramme du programme correspondant.

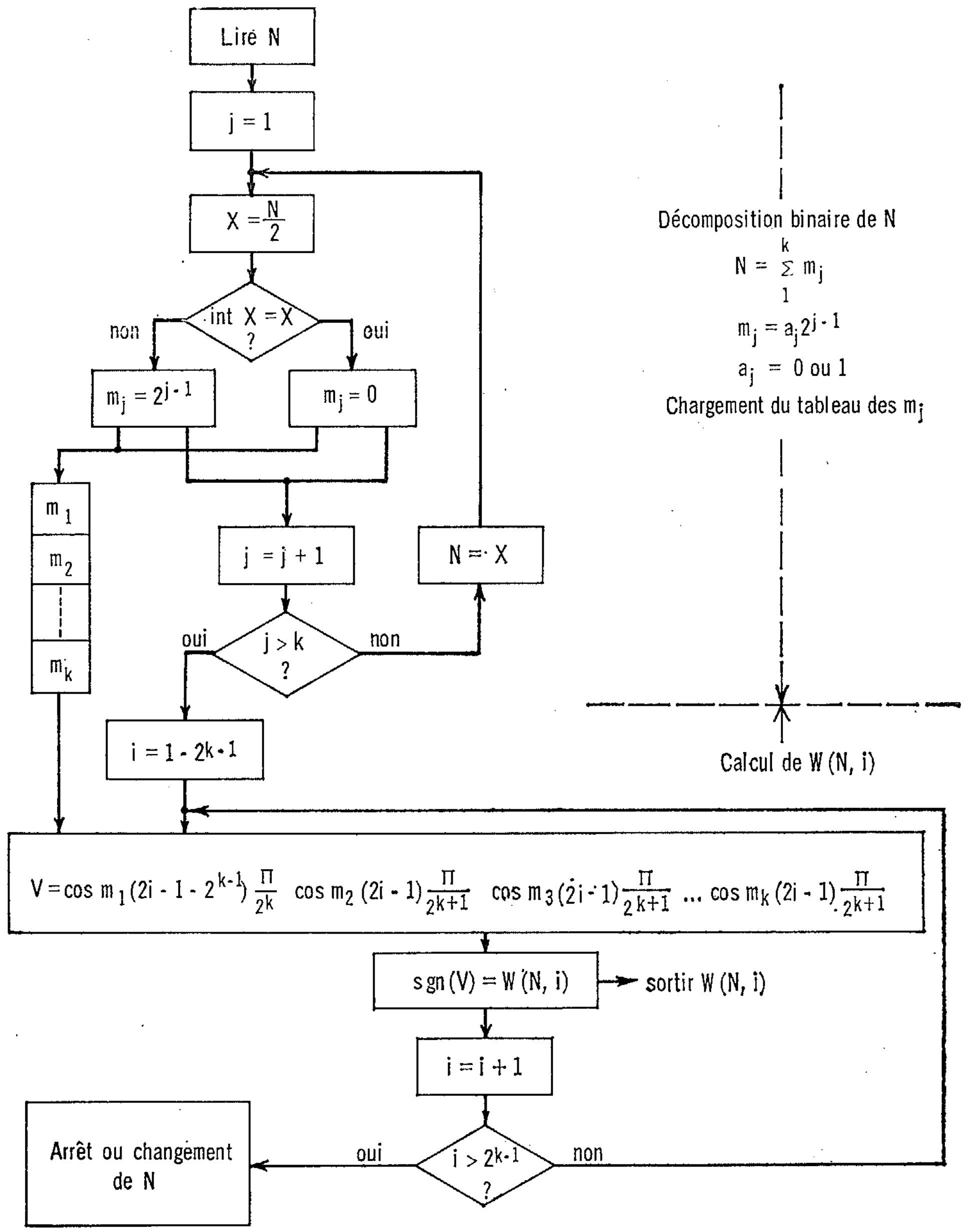


FIG. 2. — Organigramme du programme de calcul d'une fonction de Walsh de rang donné *N*, à partir de la décomposition binaire de *N*.

III. DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE DE FOURIER DES FONCTIONS DE WALSH

III.1. Généralités.

Dans le présent chapitre, nous calculons le développement en série de Fourier d'une fonction de Walsh indéfiniment répétée (porteuse Walsh). Ce signal étant périodique, il est possible de le développer en série de Fourier à partir de la connaissance de ses valeurs sur l'intervalle de définition égal à une période.

Les théorèmes généraux sur les séries de Fourier nous permettent d'énoncer les résultats suivants :

a) toute fonction de Walsh de rang pair *(cal)* se développe en *série de cosinus à coefficients réels.* En effet, il s'agit d'une fonction *paire,* à valeurs *réelles* ;

b) de même, toute fonction de Walsh de rang impair *(sal)* se développe en *série de sinus à coefficients réels.*

Nous allons, en outre, établir rigoureusement un théorème préliminaire, qui apparaît à l'examen d'un tableau de fonctions de Walsh, et sera utile pour la présente étude.

III.2. Théorème préliminaire.

Toute fonction de Walsh de rang pair est égale à la fonction impaire de même séquence, cycliquement décalée.

(*) 9 100 B Hewlett-Packard avec table traçante.

III.2.1. Démonstration.

Soit $j_0 > 1$, l'indice de l'élément binaire non nul de poids le plus faible dans l'expression binaire du rang N de la fonction paire considérée. Ce numéro binaire se termine donc par $j_0 - 1$ zéros.

Le numéro binaire de la fonction impaire de même séquence, qui la précède immédiatement, se termine donc par un zéro suivi de $j_0 - 1$ unités.

Les éléments binaires de rang supérieur à j_0 sont les mêmes pour les deux fonctions.

Exemple : $j_0 = 2$.

$N = 6 = 00110$, fonction : cal $(3, x)$,

$N = 5 = 00101$, fonction : sal $(3, x)$.

La fonction paire a pour expression, d'après (4) :

$$\mathrm{W}(2\,s,\ x) = \operatorname{sgn}\ [\mathrm{Y}(x)\ \cos\ (2^{j_0-2}\,x)]\,,$$

avec

$$\mathrm{Y}(x) = \prod_{j_0+1}^{k} \cos\ (a_j\ 2^{j-2}\,x)\,, \tag{6}$$

La fonction impaire a, de même, pour expression :

$$\mathrm{W}(2\,s - 1\,,\ x) = \operatorname{sgn}\ [\mathrm{Y}(x)\ \cos\ (2^{j_0-3}\,x) \times \cos\ (2^{j_0-4}\,x)\ \ldots\ \cos x\ \sin x]\,. \tag{7}$$

La fonction Y(x) étant la même que pour (6), puisque les éléments binaires de rang supérieur à j_0 sont les mêmes pour les deux valeurs consécutives de N considérées.

Appliquant à (7) de droite à gauche, $j_0 - 1$ fois de suite, la formule

$$\operatorname{sgn}\ [(\sin x\ \cos x)] = \operatorname{sgn}\ (\sin 2\,x)\,,$$

il vient :

$$\mathrm{W}(2\,s - 1\,,\ x) = \operatorname{sgn}\ [\mathrm{Y}(x)\ \sin\ (2^{j_0-2}\,x)]\,. \tag{7}$$

Posant $z = 2^{j_0-2}\, x$, on voit que l'on a :

$$W(2\,s\,,\; z) = \text{sgn}\;[Y(z)\;\cos\;z]\,,$$

et

$$W(2\,s - 1,\; x) = \text{sgn}\;[Y(z)\;\sin\;z]\,,$$

$$Y(z) \text{ ayant la forme : } \prod_{j_0+1}^{k} \cos\,(a_j\; 2^{j-j_0}\, z)\,.$$

Si $Y(z)$ renferme le facteur $\cos 2\,z$, on a :

$$W(2\,s,\; z) = W(2\,s - 1,\; z - \pi/2) \text{ (cas où } a_{j_0+1} = 1)\,.$$

Si $Y(z)$ ne renferme pas le facteur $\cos 2\,z$, mais commence par un facteur $\cos 4\,z$ ou supérieur, on a :

$$W(2\,s,\; z) = W(2\,s - 1,\; z + \pi/2) \text{ (cas où } a_{j_0+1} = 0)\,.$$

En effet, les cosinus ayant un coefficient de z égal ou supérieur à 4 sont invariants par un décalage de $\pi/2$ de z.

Dans l'exemple ci-dessus :

$$j_0 = 2\;;\; z = x$$

$$\text{cal}\;(3,\; x) = \text{sgn}\;[\cos\;2\,x\;\cos\;x]\,,$$

$$\text{sal}\;(3,\; x) = \text{sgn}\;[\cos\;2\,x\;\sin\;x]\,,$$

d'où :

$$\text{cal}\;(3,\; x) = \text{sal}\;(3\,,\; x - \pi/2)\,.$$

III.2.2. Conséquences.

Il résulte du théorème précédent que deux fonctions de même séquence *indéfiniment répétées* ne diffèrent l'une de l'autre que par le choix de l'origine des temps.

Elles ont donc nécessairement *des coefficients de Fourier de même module pour chaque rang.* Ces coefficients ne diffèrent que par le signe, puisqu'ils sont réels, lorsque l'origine des temps est, comme dans la définition utilisée présentement, telle que les fonctions soient paires ou bien impaires sur l'intervalle de définition.

Remarque.

Il ne résulte *pas* du fait que les deux fonctions de Walsh associées de même séquence aient mêmes coefficients de Fourier, au signe près, que ces deux fonctions se correspondent par la transformation de Hilbert, c'est-à-dire que le signal cal (n, x) + $\mathbf{j}$ sal (n, x) soit un signal analytique au sens de Gabor et Ville (6).

La transformée de Hilbert d'une fonction de Walsh présente en effet des points *infinis*. Par exemple :

$$\text{sal}\,(1, x) = \frac{4}{\pi}\left[\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots\right],$$

$$\text{cal}\,(1, x) = \frac{+4}{\pi}\left[\cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \ldots\right].$$

La transformée de Hilbert de sal $(1, x)$ est, par contre :

$$\text{sal}^*\,(1, x) = \frac{-4}{\pi}\left[\cos x + \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} + \ldots\right]$$

fonction qui présente un point infini pour $x = 0$ et pour $x = k\pi$, k entier. Elle est égale à $(2\mathbf{j}/\pi)\log_e|\text{tg}\,x/2|$, ainsi qu'on peut l'établir directement.

Le signal analytique dont sal $(1, x)$ est la partie réelle a pour expression :

$$\text{sal}\,(1, x) + \mathbf{j}\ \text{sal}^*\,(1, x) = 1 + \frac{2\mathbf{j}}{\pi}\log_e \text{tg}\,\frac{x}{2}.$$

Cette formule permet de calculer la *phase instantanée* d'un signal rectangulaire qui est dans le cas présent :

$$\varphi(x) = \text{Arc tg}\left(\frac{2}{\pi}\log_e \text{tg}\,\frac{x}{2}\right),$$

et la *fréquence instantanée* du même signal :

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{2}{\pi \sin x\,(1 + (4/\pi^2)\log_e^2|\text{tg}x/2|)}.$$

III.3. Calcul de la série de Fourier d'une porteuse Walsh.

III.3.1. Au chapitre II, nous avons rendu directement calculable la fonction $W_N(i)$ qui est la valeur de la fonction de Walsh de rang N sur l'intervalle numéro i de chaque période (i variant de $1 - 2^{k-1}$ à 2^{k-1}).

Pour calculer la série de Fourier de $W(N, x)$ indéfiniment répétée, nous décomposerons $W(N, x)$ en la somme de 2^{k-1} fonctions élémentaires qui chacune ne diffèrent de zéro, dans la partie droite de chaque période, que dans l'intervalle n° i où elles valent $+ 1$, leur valeur dans l'intervalle symétrique de la partie gauche de chaque période s'en déduisant en vertu des propriétés de symétrie (ou d'antisymétrie) de la fonction considérée.

Si nous appelons v_i ces fonctions de base qui ne diffèrent de zéro que sur deux intervalles au total dans chaque période, nous aurons :

$$W(N, x) = \sum_{i=1}^{i=2^{k-1}} W_N(i)\, v_i .$$

Il nous suffit donc de calculer les transformées de Fourier des deux types de fonction v_i représentées figure 3, *a* : pair, et *b* : impair.

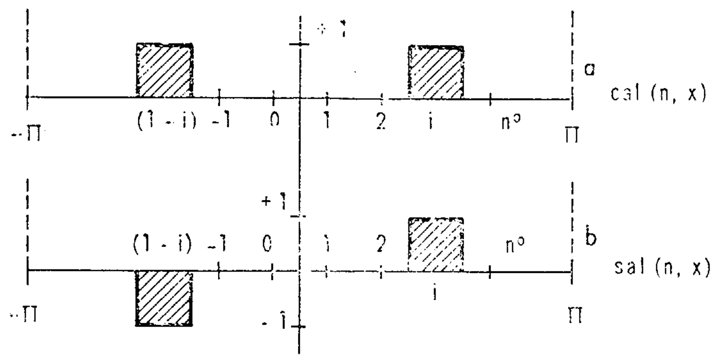


FIG. 3. — Les deux types de fonction v_i : *a* pair, *b* impair.

L'intégrale de définition des coefficients de Fourier sera étendu à la moitié droite de la période, c'est-à-dire à l'intervalle $(0, \pi)$.

III.3.2. Série de Fourier d'une porteuse Walsh paire.

L'application des formules de base de la transformation de Fourier donne :

$$c_n^i = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos nx)\, v_i \, dx = \frac{2}{\pi_n} \left[\sin \frac{\pi}{2^{k-1}}\, ni - \sin \frac{\pi}{2^{k-1}}\, n(i-1) \right]$$

D'où :

$$\text{cal}\,(s\,,\;x) = \sum_{i=1}^{i=2^{k-1}} \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n^i \;\mathrm{W}_{2s}\,(i)\;,$$

$$(8)\quad \text{cal}\,(s, x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2}{\pi n} \cos nx \sum_{i=1}^{i=2^{k-1}} \mathrm{W}_{2s}\,(i) \times \left[\sin\left(\frac{\pi}{2^{k-1}}\, ni\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2^{k-1}}\, n\,(i-1)\right)\right].$$

III.3.3. ***Série de Fourier d'une porteuse Walsh impaire.***

Le calcul est identique. On a :

$$s_n^i = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\sin nx)\, v_i\, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi n}\left[\cos \frac{\pi}{2^{k-1}}\, n\,(i-1) - \cos\frac{\pi}{2^{k-1}}\, ni\right],$$

et

$$(9)\quad \text{sal}\,(s,\,x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2}{\pi n} \sin nx \sum_{i=1}^{i=2^{k-1}} \mathrm{W}_{2s-1}(i) \times \left[\cos\frac{\pi}{2^{k-1}}\, n\,(i-1) - \cos\frac{\pi}{2^{k-1}}\, ni\right].$$

La figure 4 représente les spectres des 16 premières fonctions impaires sal $(1, x)$ à sal $(16, x)$, tracées avec la calculatrice de bureau précédemment mentionnée.

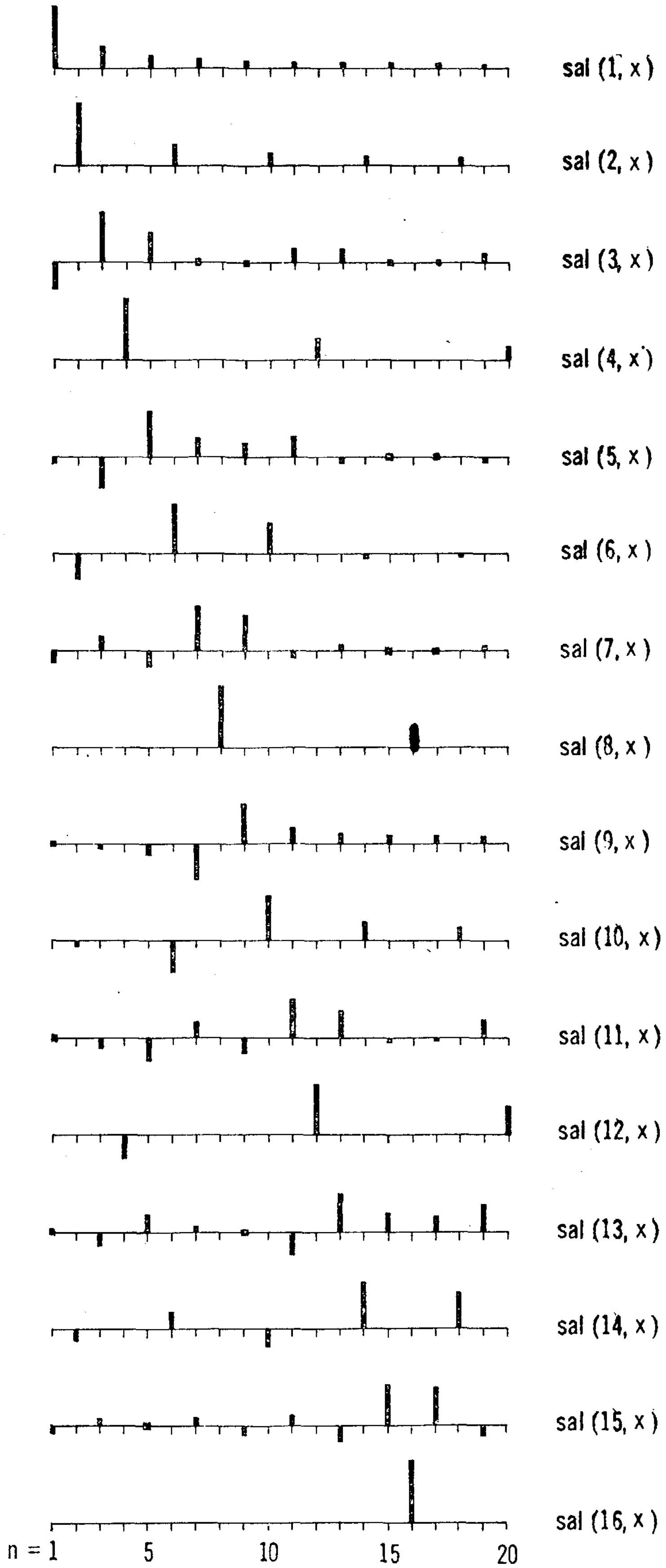


FIG. 4. — Spectres des 16 premières fonctions impaires sal $(1, x)$ à sal $(16, x)$.

IV. APPLICATION A L'ÉTUDE DES CONSÉQUENCES DU FILTRAGE SUR LA TRANSMISSION DES SIGNAUX PAR L'INTERMÉDIAIRE D'UNE PORTEUSE WALSH, CLASSES D'ÉQUIVALENCE ET MATRICE UNIVERSELLE DE DIAPHONIE

IV.1. Généralités.

Nous considérerons un multiplex à porteuses Walsh représenté sur la figure 5.

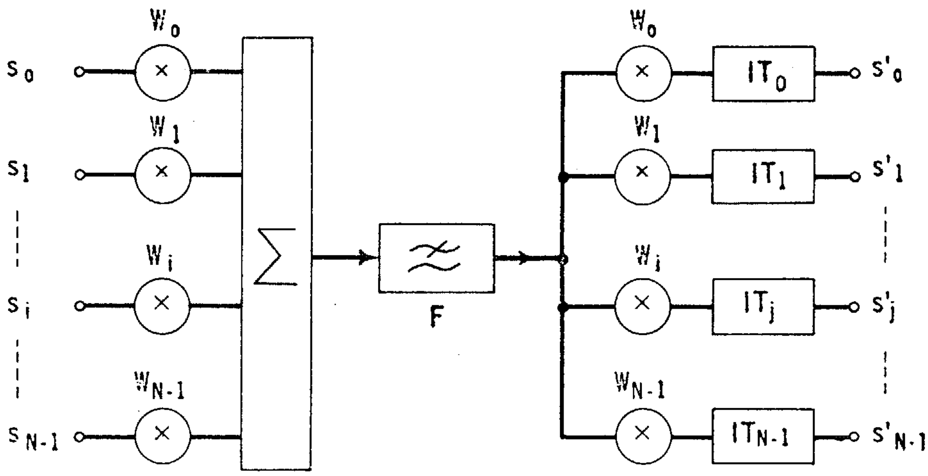


FIG. 5. — Multiplex à porteuse Walsh.

N échantillons analogiques s_i sont multipliés chacun par la fonction de Walsh de même numéro : $W_i(t)$ pendant une période. Les signaux obtenus sont ajoutés et transmis en ligne.

A l'arrivée, le démultiplexage s'opère en multipliant le signal composite reçu par chacune des N fonctions de Walsh, et en intégrant le produit pendant une période dans l'intégrateur IT correspondant.

Il est supposé :

— que le synchronisme est parfait,

— que les intégrateurs sont vidés au début de chaque période,

— que l'effet de la ligne de transmission peut être assimilé à celui du filtre passe-bas rectangulaire, dont le déphasage est supposé nul.

Dans ces conditions, les signaux reçus s'_j sont liés aux signaux émis s_i par un système linéaire :

$$s'_j = \sum_{i=0}^{i=N-1} D_{ij}\, s_i \,, \tag{10}$$

l'écart de la matrice D_{ij} par rapport à la matrice unité (qui est sa forme limite en l'absence de filtrage) mesure l'effet du filtrage opéré par la ligne sur la transmission des N échantillons.

Nous caractérisons cet effet par les coefficients suivants en décibels, qui seront des fonctions de la bande passante du filtre passe-bas F :

$20 \log_{10} |D_{ii}|$ = affaiblissement de filtrage sur la porteuse W_i,

$20 \log_{10} |D_{ij}|$ = diaphonie de filtrage entre les porteuses W_i et W_j.

IV.2. Principe du calcul.

Dans une période, chaque fonction de Walsh est représentée par son développement de Fourier :

$$W_i(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} f_{ni} \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} nx ,$$

les coefficients de Fourier étant ceux définis en 3 [formules (8) et (9)].

L'intégrateur IT_i recevant la porteuse W_i fournit, au bout d'une période, la tension :

$$D_{ii} = \int_{-\pi}^{\pi} W_i^2(x)\, dx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n=n_{max}} f_{ni}^2 . \tag{11}$$

Soumis à la porteuse W_j, ce même intégrateur fournit :

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n=n_{max}} f_{ni}\, f_{nj} , \tag{12}$$

si i et j sont de même parité et 0 s'ils ne sont pas de même parité, la sommation selon n étant arrêtée à *la valeur la plus élevée qui passe dans le filtre* F, soit n_{max}. On voit immédiatement que $D_{ij} = D_{ji}$.

Il résulte des propriétés d'orthogonalité des fonctions de Walsh, que l'on a :

$$D_{ii}(\infty) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n=\infty} f_{ni}^2 = 1, \text{ pour tout } i,$$

$$D_{ij}(n) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n=\infty} f_{ni} f_{nj} = 0 \text{ pour toute paire } i, j; i \neq j .$$

C'est-à-dire que, s'il n'y a pas de filtrage ($n_{max} = \infty$), la matrice D_{ij} se réduit bien à la matrice unité.

Nous nous proposons ci-après de calculer les valeurs de $D_{ij}(n)$ traduisant l'effet d'un filtrage rectangulaire qui élimine tous les harmoniques de rang supérieur à n_{max}.

IV.3. Définition des classes d'équivalence diaphonique des fonctions de Walsh.

IV.3.1. Nous venons d'indiquer que si i et j n'ont pas la même parité; l'application de l'une de ces fonctions à un intégrateur alimenté par l'autre produira un résultat nul *quel que soit le filtrage* (puisque la série de Fourier de l'une se compose de sinus, et celle de l'autre de cosinus).

Nous disons que ces deux fonctions sont alors *absolument orthogonales*, c'est-à-dire que leur orthogonalité subsiste quel que soit le filtrage que subissent l'une ou l'autre de ces deux fonctions.

Le cas envisagé ci-dessus n'est pas le seul, car il est également possible que les fréquences qui figurent avec des coefficients non nuls dans la série de Fourier de l'une des fonctions de figurent pas, avec des coefficients non nuls, dans celle de l'autre.

Nous définirons donc comme *absolument orthogonales* deux fonctions de Walsh W_i et W_j telles que :

— ou bien i et j n'ont pas même parité,

— ou bien les fréquences qui figurent, avec des coefficients non nuls, dans le développement en série de Fourier de l'une ne figurent pas, avec des coefficients non nuls, dans celui de l'autre.

Pour deux fonctions absolument orthogonales, on a :

$$D_{ij}(n) = 0 \text{ quel que soit } n.$$

IV.3.2. Nous allons établir que si deux fonctions de Walsh ont une composante de Fourier en commun, alors elles ont toutes leurs composantes de Fourier en commun (*) ; autrement dit, la relation *ne pas être absolument orthogonales* est une relation d'équivalence qui permet de classer les fonctions de Walsh en *classes d'équivalences diaphoniques*, telles que deux fonctions situées dans des classes différentes soient absolument orthogonales, deux fonctions situées dans la même classe ne l'étant pas.

A) *Théorème.* — Si deux fonctions de Walsh développées en série de Fourier sur une période ont une composante de Fourier en commun, elles ont toutes leurs composantes de Fourier en commun.

Il nous suffit d'établir le théorème pour les *fonctions de rang pair*, puisque nous avons établi, § III.2.2., que toute fonction de rang impair a un développement de Fourier où interviennent *les mêmes fréquences* que pour la fonction paire de même séquence, les cosinus étant remplacés par des sinus, au signe près, et les modules des coefficients étant les mêmes pour chaque fréquence.

Considérant donc uniquement les fonctions de rang pair (cal), posons, en reprenant les notations du § III.2.1. :

$j_0 > 1 =$ rang du premier élément binaire non nul dans l'expression binaire du rang N.

Selon la formule (6), on a :

$$W(2\,s\,,\ x) = \operatorname{sgn}\ [Y(x)\ \cos\ (2^{j_0-2}\,x)]$$

ou en posant : $2^{j_0-2}\,x = z$

$$W(2\,s,\ x) = \operatorname{sgn}\ [Y(z)\ \cos\ z] \tag{13}$$

La fonction $Y(z)$ est un produit de cosinus de multiples de z par des puissances entières de 2. Dans ces conditions, le théorème de multiplication des fonctions trigonométriques montre que le crochet dans (13) est une *somme de cosinus de multiples impairs de z*. La fonction sgn ( ) n'altérant pas les propriétés de symétrie, le développement de Fourier de (13) ne comprendra *que les cosinus des multiples impairs de*

$$z = 2^{j_0-2}\,x\,.$$

Sachant que, pour deux valeurs différentes de j_0, les séries des multiples *impairs* de $2^{j_0-2}\,x$ sont disjointes, il en résulte que :

— deux fonctions paires ayant la même valeur de j_0 ont toutes leurs composantes de Fourier en commun ;

(*) Avoir une composante de Fourier en commun signifiant avoir des termes trigonométriques de *même nature* (cosinus ou sinus) à la *même fréquence*, avec des coefficients *tous deux non nuls.*

— deux fonctions paires n'ayant pas la même valeur de j_0 n'ont aucune composante de Fourier en commun et sont totalement orthogonales.

B) Nous voyons donc que les classes d'équivalence diaphonique sont déterminées par la valeur de j_0. Dans ce qui suit, nous poserons :

$k_0 = j_0 - 1 =$ rang du premier élément binaire non nul dans l'expression binaire de la *séquence, s*.

IV.3.3. Les conséquences du théorème précédent peuvent être récapitulées comme suit :

a) toutes les fonctions de Walsh paires sont absolument orthogonales à toutes les fonctions de Walsh impaires ; il existe donc autant de classes d'équivalence pour les fonctions paires que pour les fonctions impaires ;

b) deux fonctions sont dans la même classe d'équivalence si, et seulement si, elles ont même parité et même valeur de k_0 ;

c) les fonctions de la classe d'équivalence k_0 ont pour composantes de Fourier la série des fréquences multiples impaires de 2^{k_0-1}.

IV.3.4. Numéro diaphonique. Dénombrement des classes.

Dans chaque classe d'équivalence, nous pouvons ordonner, en séquence croissante, les fonctions qui y sont contenues, au moyen des éléments binaires de rang supérieur à k_0 dans l'expression de leur séquence. Ces éléments binaires constituent la représentation binaire d'un nombre e que nous appellerons *numéro diaphonique*.

On voit aisément que k_0 peut aller de 0 à k dans le groupe des 2^k premières fonctions de Walsh, la valeur k n'étant atteinte que par la dernière fonction du groupe (sal $2^{k-1}, x$).

En outre, k_0 n'est pas défini pour la fonction W_0, qui constitue une classe à elle seule.

Le tableau I indique le contenu des 10 classes d'équivalence qui existent dans le cas de $k = 5$. Il

TABLEAU I

Tableau des 10 classes d'équivalence diaphonique pour les 32 premières fonctions de Walsh
(Les barres en trait fort séparent les classes d'équivalence)

Rang N	Fonctions paires	Séquence s	k_0	e_0	Fonctions impaires	Rang N
0	cal (0, x)	0	—	—		
2	cal (1, x)	1 = 0001	1	0	sal (1, x)	1
6	cal (3, x)	3 = 0011		1	sal (3, x)	5
10	cal (5, x)	5 = 0101		2	sal (5, x)	9
14	cal (7, x)	7 = 0111		3	sal (7, x)	13
18	cal (9, x)	9 = 1001		4	sal (9, x)	17
22	cal (11, x)	11 = 1011		5	sal (11, x)	21
26	cal (13, x)	13 = 1101		6	sal (13, x)	25
30	cal (15, x)	15 = 1111		7	sal (15, x)	29
4	cal (2, x)	2 = 0010	2	0	sal (2, x)	3
12	cal (6, x)	6 = 0110		1	sal (6, x)	11
20	cal (10, x)	10 = 1010		2	sal (10, x)	19
28	cal (14, x)	14 = 1110		3	sal (14, x)	27
8	cal (4, x)	4 = 0100	3	0	sal (4, x)	7
24	cal (12, x)	12 = 1100		1	sal (12, x)	23
16	cal (8, x)	8 = 1000	4	0	sal (8, x)	15
		16 = 10000	5	0	sal (16, x)	31

apparaît avec évidence à l'examen de ce tableau qu'il existe toujours $2k$ classes d'équivalence pour le groupe de 2^k fonctions de Walsh.

Il en résulte immédiatement qu'un multiplex utilisant seulement $2k$ porteuses Walsh choisies dans le groupe des 2^k premières fonctions de Walsh, à raison d'une, et d'une seule, par classe d'équivalence, permet dans le cas du modèle étudié de réaliser une transmission *sans diaphonie, quel que soit le filtrage.*

IV.3.5. Isomorphisme des classes. Matrice de diaphonie.

a) Il résulte de ce qui précède que les coefficients de diaphonie D_{ij} de la formule (10) ne diffèrent de zéro que si les fonctions de Walsh correspondantes se trouvent dans la même classe d'équivalence diaphonique.

Nous allons montrer ci-après que *toutes les classes d'équivalence diaphonique sont isomorphes,* ce qui permet de définir une matrice unique $D_{e,e'}(n')$ qui donne les coefficients de diaphonie par filtrage pour une classe d'équivalence quelconque, en fonction d'un paramètre n' qui est un sous-multiple de n figurant dans la définition de $D_{ij}(n)$, et des seuls numéros diaphoniques des deux fonctions de Walsh considérées.

b) Théorème. — *Toutes les classes d'équivalence diaphoniques sont isomorphes, au signe près, et sont décrites par la même matrice :*

$D_{ij}(n)$, i et j étant les rangs de deux fonctions de la même classe, ou

$D_{e,e'}(n')$, e, e' étant les numéros diaphoniques de deux fonctions dans la même classe.

C a s d e s c l a s s e s p a i r e s.

Si deux fonctions paires ont même numéro diaphonique, soit e, dans des classes d'équivalence différentes, soient k_0 et k'_0, on voit immédiatement en examinant la formule (13) qu'elles dérivent du produit des cosinus des mêmes multiples de z et que seule la définition de z change d'une classe à l'autre :

$z = 2^{k_0 - 1} x$ pour la classe définie par k_0,

$z' = 2^{k'_0 - 1} x$ pour la classe définie par k'_0.

Il en résulte que l'on passe de l'une à l'autre de ces fonctions par un changement de l'échelle des fréquences dans le rapport $2^{k_0 - k'_0}$, rapport qui ne dépend que des deux classes considérées.

Par conséquent, si nous appelons $D^{k_0}_{e,e'}(n)$ le coefficient de diaphonie entre les fonctions de numéros diaphoniques e et e' dans la classe k_0, les sommations des formules (11) et (12) étant arrêtées à la valeur n (incluse) de l'indice n, on a :

$$D^{k_0}_{e,e'}(n) = D^{k'_0}_{e,e'}(n/2^{k'_0 - k_0}) . \tag{14}$$

Cette formule établit le théorème annoncé pour le cas des classes d'équivalence contenant des fonctions paires.

C a s d e s c l a s s e s i m p a i r e s.

Deux fonctions impaires ont, au signe près, et pour toute valeur de n, le même coefficient diaphonique $D_{i,j}$ que les fonctions paires de même séquence :

$$D_{ij}(n) = D_{i+1,\,j+1}(n) ,$$

i, j impairs et correspondant à des rangs situés dans la même classe d'équivalence (k).

Il résulte, en effet, des résultats du § III.2.1. que l'on a toujours :

$$W(2\,s - 1,\, z) = \pm\ W(2\,s,\, z - \pi/2) ,$$

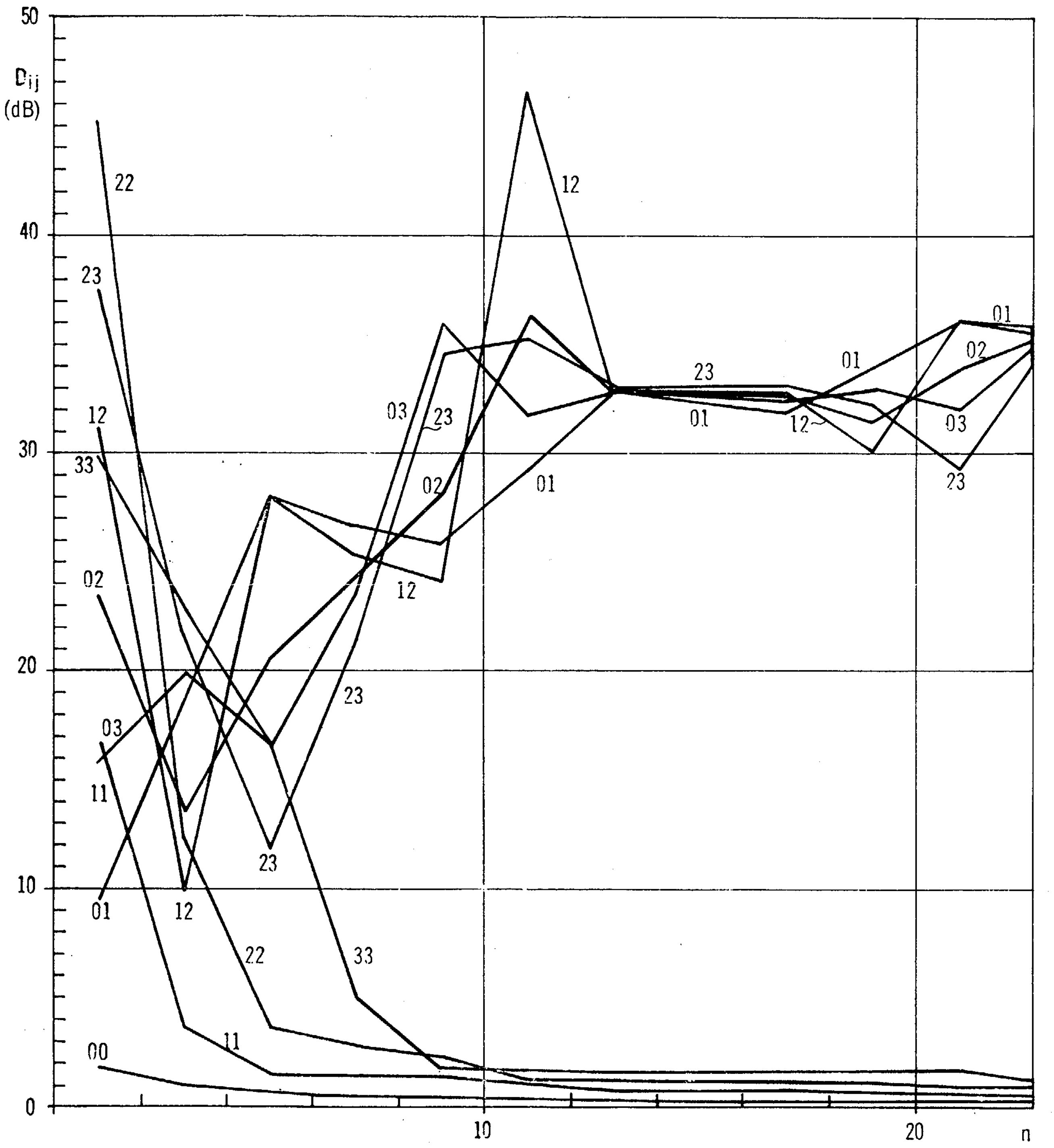
avec $$z = 2^{k_0 - 1}\, x .$$

Il en résulte que le produit $W(i, x)\ W(j, x)$ coïncide toujours, au signe près, avec le produit :

$$W(i + 1,\, x)\ W(j + 1,\, x) ,$$

moyennant un décalage cyclique de $\pi/2^{k_0 - 1}$ de la variable x, même lorsque les fonctions de Walsh sont remplacées chacune par leur série de Fourier tronquée.

Ces deux produits ont donc, au signe près, les mêmes coefficients de Fourier à chaque fréquence, et l'énergie intégrée jusqu'à l'harmonique n est la même, en valeur absolue, quel que soit n.



ɪɢ. 6. — Courbes de diaphonie de filtrage en décibels (les courbes 02 et 13 sont identiques).

Chaque classe impaire est donc isomorphe à la classe paire correspondante, ce qui complète la démonstration du théorème annoncé.

c) *Matrice universelle de diaphonie.*

Il résulte du théorème précédent que si l'on connaît la matrice

$$D^{1}_{e,e'}(n),$$

pour la classe de diaphonie : $k_0 = 1$, le coefficient de diaphonie entre deux fonctions de Walsh de numéros diaphoniques e, e' appartenant à la classe de diaphonie (k_0), avec $k_0 > 1$ sera, pour un filtrage coupant les fréquences supérieures à n donné par la formule :

$$D^{k_0}_{e,e'}(n) = D^{1}_{e,e'}(n/2^{k_0-1}). \tag{15}$$

IV.3.6. Application.

La figure 6 représente les courbes de diaphonie en décibels pour la classe d'équivalence comportant les numéros 0, 1, 2, 3. Ces courbes permettent donc l'évaluation immédiate de la diaphonie et de l'affaiblissement de filtrage pour les fonctions appartenant au groupe des 16 premières fonctions de Walsh.

IV.3.7. Cas d'un filtre de caractéristiques quelconques.

Les résultats précédents supposent un *filtre rectangulaire à déphasage constant* dont les seuls effets sont :

— de conserver sans changement les termes de Fourier pour $n \leqslant n_{\mathbf{max}}$;

— de supprimer sans résidu les termes de Fourier pour $n > n_{\max}$.

Dans le cas d'un filtre à caractéristiques différentes, il y a lieu de tenir compte de l'action du filtre sur chaque composante de Fourier séparément, et de poursuivre la sommation jusqu'à $n = \infty$ ou, en pratique, jusqu'à une valeur de n assez grande pour que l'énergie des termes supprimés soit devenue négligeable.

Il est évident que *les propriétés des classes d'équivalence subsistent,* car elles ont été établies d'après les propriétés des séries de Fourier *avant filtrage.*

Par contre, la forme des fonctions de diaphonie $D_{e,e'}(f_c)$, f_c étant une *fréquence de coupure,* caractéristique du filtre, sera évidemment fonction des caractéristiques du filtre et ces fonctions ne pourront être obtenues que par un programme d'intégration où entreront les paramètres du filtre.

Nous estimons, par analogie avec d'autres cas analogues (par exemple, courbes de seuil en modulation de fréquence), que la forme du filtre ne doit pas influer très notablement sur celle des courbes de diaphonie.

V. ÉTUDE DE LA MATRICE UNIVERSELLE DE DIAPHONIE, PRODUITS DE CONVOLUTION DES FONCTIONS DE WALSH, NOMBRE DE TERMES DISTINCTS DE LA MATRICE DE DIAPHONIE D'UNE CLASSE D'ÉQUIVALENCE

V.1. Généralités.

V.1.1. Nous avons constaté par la figure 6 que, lorsque l'on trace les courbes de diaphonie de filtrage correspondant à une certaine classe d'équivalence, la même courbe se reproduisait parfois (dans le cas des la figure 6, les courbes 02 et 13 sont identiques).

L'objet du présent chapitre est de préciser, par l'étude des produits de convolution des fonctions de Walsh, combien il existe de fonctions de diaphonie *distinctes* dans la classe d'équivalence universelle limitée à 2^k fonctions (numéros d'équivalence de 0 à 2^{k-1}).

V.1.2. La fonction de diaphonie entre deux fonctions de Waslh, W_N et $W_{N'}$ est définie (formule 12 du § IV.2) par :

$$D_{NN'}(n_m) = \frac{1}{2} \sum_{1}^{n_m} f_n f'_n \,, \tag{16}$$

f_n et f'_n étant les coefficients des séries de Fourier des deux fonctions de Walsh considérées, celles-ci étant supposées (par l'hypothèse que les deux fonctions de Walsh sont dans la même classe) avoir les mêmes composantes de Fourier.

Il résulte du théorème de composition que :

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} f_n f'_n \cos nx \,,$$

n'est autre que le développement en série de Fourier du produit de convolution :

(17)

$$Q_{NN'}(x) = \int_{-\pi}^{\pi} W(N, u)\, W(N', u - x)\, du = W_N * W_{N'}$$

des deux fonctions de Walsh considérées, au signe près éventuellement.

V.1.3. Deux couples formés de fonctions de Walsh qui ne sont pas absolument orthogonales auront donc la même courbe de diaphonie si, et seulement si, les produits de convolution correspondants sont identiques au signe près sur toute la période.

Dans tout ce qui suit nous négligerons le signe des produits de convolution, puisque seule la *valeur absolue* des coefficients de diaphonie a une importance pratique en télécommunications. De même, nous disposerons arbitrairement du signe des fonctions de Walsh. (Il va de soi que le signe est défini une fois pour toutes pour chacune des fonctions considérées.)

V.1.4. Etant donné deux fonctions de Walsh, les trois situations suivantes sont seules possibles :

a) les deux fonctions sont *dans la même classe d'équivalence* (même valeur de k_0 et même parité). Dans ce cas, elles ne sont *pas absolument orthogonales* et leur produit de convolution n'est *pas nul*. Il existe une fonction de diaphonie, qui s'exprime en fonction du développement en série de Fourier de leur produit de convolution [formules (16) et (17)]. On remarquera que le produit de convolution est nul pour $x = 0$, puisque les deux fonctions sont orthogonales, à moins que les deux fonctions ne soient identiques, auquel cas on a :

$$Q_{N,N}(O) = 2^k ;$$

b) les deux fonctions sont dans *deux classes d'équivalence correspondantes, l'une paire, l'autre impaire* (même valeur de k_0 ; parités différentes). Dans ce cas, elles sont *absolument orthogonales* puisque, pour chaque fréquence, p l'une d'elles a la composante de Fourier : cos px et l'autre la composante : sin px. Leur produit de convolution n'est pas nul. En remplaçant l'une des fonctions (par exemple la fonction impaire) par la fonction paire *ayant même numéro d'équivalence dans sa classe* (et qui en résulte moyennant un décalage cyclique, comme il a été démontré en § IV.3.5.*b*), on voit que le produit de convolution n'est pas nul sur toute la période (mais seulement nul à l'origine) et que l'on peut l'obtenir *moyennant un décalage cyclique,* à partir du produit de convolution des deux fonctions ayant les mêmes numéros d'équivalence dans la *même* classe ;

c) les deux fonctions sont dans *deux classes d'équivalence qui diffèrent par la valeur de* k_0. Dans ce cas, elles sont *absolument orthogonales* et leur produit de convolution *est nul* sur toute la période.

V.2. Représentation polynômiale des fonctions de Walsh.

V.2.1. Pour l'étude des produits de convolution des 2^k premières fonctions de Walsh, nous disposerons du signe de celles-ci pour qu'elles valent l'unité sur l'intervalle de gauche de la période complète, c'est-à-dire pour que :

$$W(N, -\pi) = 1, \text{ ou } W_N(i) = 1 \text{ pour } i = 1 - 2^{k-1},$$

avec les notations précédentes.

Nous représenterons dans ces conditions les fonctions de Walsh par des polynômes dans une indéterminée y, définis modulo $(y^{2^k} - 1)$, les coefficients de ces polynômes étant pris *dans le corps des réels,* sans limitation, et valant ± 1 pour les fonctions de Walsh.

L'ensemble de ces polynômes constitue un anneau, mais non pas un corps. Le coefficient du terme y^p est la valeur de la fonction sur l'intervalle numéro $p + 1$ à partir de la gauche.

Nous allons démontrer les propositions suivantes.

V.2.1.1. Les fonctions de Walsh sont représentées, dans ces conditions, par des polynômes factorisables sous la forme :

$$(18) \quad P(y) = (1 \pm y)(1 \pm y^2)(1 \pm y^4) \dots (1 \pm y^{2^{k}-1}), \quad (k \text{ facteurs}).$$

Chaque fonction de Walsh correspond à un certain choix des signes, parmi les 2^k possibles, dans l'expression (18).

V.2.1.2. Les polynômes factorisés étant ordonnés comme ci-dessus par ordre de degré croissant, si l'on associe le chiffre binaire 0 au signe + et le chiffre binaire 1 au signe —, le choix des signes correspondant à une certaine fonction de Walsh fournit un nombre binaire de k chiffres, qui n'est autre que le rang N de la fonction de Walsh correspondante, *écrit en code binaire réfléchi* (code Gray).

V.2.1.3. Etant donné deux fonctions de Walsh représentées par les polynômes $P(y)$ et $P'(y)$ modulo $(y^{2^k} - 1)$ le produit: $P(y)P'(1/y)$ du premier polynôme en y par le second polynôme en $1/y$ (produit effectué dans le corps des réels sans autre limitation pour les coefficients) *définit par ses coefficients les valeurs successives du produit de convolution des deux fonctions de Walsh correspondantes à la fin de chacun des intervalles d'une période.*

(Les produits de convolution des fonctions de Walsh étant des fonctions formées de segments de droite, la donnée des valeurs d'un tel produit à la fin de chacun des intervalles d'une période suffit à le définir.)

Démonstration de la propriété *V.2.1.1.*

a) Les produits de la forme (18) ont évidemment une fois développé un terme de chaque degré, du degré 0 au degré $2^k - 1$, et leurs coefficients sont évidemment égaux à ± 1.

b) Si deux expressions de la forme (18) diffèrent par le signe d'un facteur, les fonctions correspondantes sont orthogonales.

Posons, en effet :

(19) $$P(y) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \dots + a_{2^k-1} y^{2^k-1},$$

(20) $$P'(y) = b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + \dots + b_{2^k-1} y^{2^k-1} (a_j, b_j = \pm 1),$$

et soit $W(x)$, $W'(x)$ les fonctions correspondantes de x, dont les valeurs sur les intervalles successifs d'une période sont définies par $a_0, a_1, \dots a_{2^k-1}$ et $b_0, b_1, \dots b_{2^k-1}$ respectivement.

On a :

$$(21) \qquad \mathrm{W}(x)\ \mathrm{W}'(x) \cdot \mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{j=2^k-1} a_j\, b_j \,.$$

Supposons alors que, P et P' étant mis sous la forme (18), P contienne le facteur $(1 + y^{2^p})$ et P' le facteur $(1 - y^{2^p})$.

On voit en développant que l'on aura, pour tout i inférieur à $2^{k-p} - 1$:

$$a_{i+2^p} = a_i\,,$$

$$b_{i+2^p} = -\, b_i\,,$$

d'où :

$$a_{i+2^p}\, b_{i+2^p} = -\, a_i\, b_i\,.$$

Chacun des termes de la somme (21) est donc annulé par le terme situé 2^p rangs plus loin, la somme des 2^{p+1} premiers termes est donc nulle, et il en va de même pour chacune des 2^{k-p-1} sommes analogues, commançant aux indices i multiples de 2^{p+1}.

Il en résulte que les 2^k fonctions rectangulaires engendrées par les 2^k expressions (18) possibles ont pour valeur $+ 1$ ou $- 1$ sur chacun des intervalles d'une période et qu'elles sont *mutuellement orthogonales deux à deux*, comme différant par le signe d'au moins un facteur. Ce système est donc *identique à celui des 2^k premières fonctions de Walsh*, à l'ordre et au signe près, en vertu du caractère *orthogonal et complet* du système des 2^k premières fonctions de Walsh.

Démonstration de la propriété V.2.1.2.

Etant donné un polynôme de la forme P(y), nous appelons *séquence* (*) de ce polynôme le nombre de changements de signe entre deux coefficients successifs, le polynôme étant développé sous la forme (19).

L'introduction du code Gray résulte de ce que si la séquence d'un polynôme change d'une unité, le signe d'un facteur et d'un seul a changé dans l'expression (18).

Considérons, en effet, une expression de la forme (18) arrêtée au degré $2^{p+1} - 1$, c'est-à-dire :

$$\mathrm{P}(y) = (1 \pm y)\,(1 \pm y^2) \ldots (1 \pm y^{2^p}),$$
$$(p + 1 \text{ facteurs})\,,$$

et soit S_p sa séquence.

Si S_p est pair, la fonction définie par P(y) a le même signe aux deux extrémités de son intervalle de définition (comprenant 2^{p+1} intervalles élémentaires).

Si S_p est impair, cette même fonction a des signes opposés aux deux extrémités de son intervalle de définition.

Multiplier cette fonction par $1 + y^{2p+1}$ revient à la répéter pour obtenir une fonction couvrant 2^{p+2} intervalles élémentaires. La multiplier par $1 - y^{2p+1}$ revient de même à la répéter après l'avoir changée de signe.

Dans le premier cas, la séquence S_{p+1} de la fonction obtenue sera : $2\,S_p$ si S_p est paire et $2\,S_p + 1$ si S_p est impaire (car un changement de signe avec passage par zéro interviendra au début du 2^{p+1} ème intervalle).

Dans le second cas, la séquence S_{p+1} sera, pour la même raison, $2\,S_p$ si S_p est impaire et $2\,S_p + 1$ si S_p est paire :

(22)
$$S^+_{p+1} = \begin{cases} 2\,S_p\,, & \text{si } S_p \text{ est paire,} \\ 2\,S_p + 1\,, & \text{si } S_p \text{ est impaire,} \end{cases}$$
$$S^-_{p+1} = \begin{cases} 2\,S_p\,, & \text{si } S_p \text{ est impaire,} \\ 2\,S_p + 1, & \text{si } S_p \text{ est paire.} \end{cases}$$

Supposons maintenant que la séquence du polynôme P(y) varie d'une unité sans que son degré varie.

Ceci est possible :

— soit si le facteur de degré 2^p a changé de signe sans que la séquence S_{p-1} des facteurs de moindre degré n'ait changé,

— soit si le facteur de degré 2^p n'a pas changé et que la séquence S_{p-1} des facteurs précédents ait changé d'une unité.

(*) La séquence s de la fonction de Walsh correspondante est la moitié de ce nombre arrondie à l'entier supérieur, car la séquence d'un polynôme telle que définie ici correspond au *nombre de passages par zéro de la fonction W* (x) *correspondante, sur l'intervalle de définition ouvert :*

$$]-\pi < x < \pi[\,.$$

(En effet, il résulte de l'application des règles (22) que si ces deux circonstances se produisaient simultanément, la séquence de P(x) varierait de 0 ou de 2 unités.)

En appliquant de proche en proche ce résultat de droite à gauche, et compte tenu du fait que si la séquence d'un produit de facteurs ne varie pas aucun des signes de ses facteurs ne peut varier, on voit qu'un seul signe a varié.

Pour ordonner par séquences croissantes les 2^k polynômes de la forme (18), nous commencerons donc par le polynôme :

$$P_0 = (1 + y)(1 + y^2)(1 + y^4) \dots (1 + y^{2^{k-1}})$$

ayant k facteurs avec le signe + et dont la séquence est évidemment nulle (tous ses coefficients valant + 1).

Par application de la règle (22), la séquence deviendra 1 si nous changeons le signe du facteur de degré supérieur, d'où :

$$P_1 = (1 + y)(1 + y^2) \dots (1 + y^{2^{k-2}})(1 - y^{2^{k-1}}),$$

et, répétant cette procédure de proche en proche, nous voyons que, le signe + correspondant à 0 et le signe − à 1, *le choix des signes dans l'expression de la forme* (18) *qui représente une fonction de Walsh est défini par la représentation de son rang,* N, *en code binaire réfléchi.*

Rappelons que, si la représentation binaire d'un nombre est $a_k a_{k-1}, \dots a_0$ ($a_j = 0$ ou 1), la représentation en code binaire réfléchi est définie par :

$$b_k b_{k-1} \dots b_0 ,$$

avec :

$$(23) \qquad \begin{aligned} b_0 &= a_0 \oplus a_1 , \\ b_1 &= a_1 \oplus a_2 , \\ &\dots\dots\dots\dots , \\ b_k &= a_k ; \end{aligned}$$

ou réciproquement :

$$(24) \qquad \begin{aligned} a_0 &= b_0 \oplus b_1 \oplus \dots \oplus b_k , \\ a_1 &= b_1 \oplus b_2 \oplus \dots \oplus b_k , \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots , \\ a_k &= b_k . \end{aligned}$$

Démonstration de la propriété V.2.1.3.

L'opération $W * W'$, telle qu'elle est définie par la formule (2) est linéaire par rapport à chacun de ses composants.

Nous pouvons donc obtenir le produit de convolution de deux fonctions de Walsh par la somme des produits de convolution élémentaires des fonctions qui ne diffèrent de zéro que sur un seul intervalle et dont chacune des fonctions de Walsh est la somme.

Ces fonctions élémentaires correspondent aux termes successifs de la représentation polynômiale développée de chaque fonction.

On voit immédiatement, en substituant dans la formule (17) de telles fonctions que le produit de convolution d'une fonction qui ne diffère de zéro que sur l'intervalle p où elle vaut 1 par une fonction qui ne diffère de zéro que sur l'intervalle q où elle vaut 1 est une *fonction triangulaire* valant l'unité pour $i = p - q$, décroissant linéairement de part et d'autre de cette valeur pour atteindre zéro pour $i = p - q + 1$ et $i = p - q - 1$, ce produit de convolution étant nul partout ailleurs (Fig. 7).

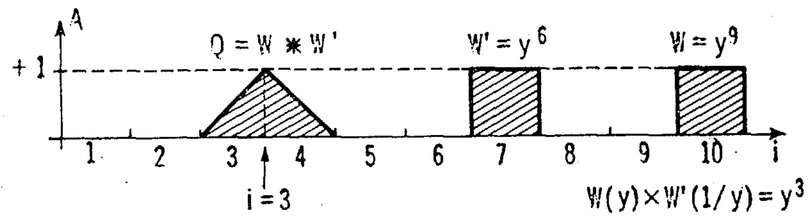


FIG. 7. — Produit de convolution élémentaire.

Toute somme de telles fonctions triangulaires est évidemment *définie par la suite de ses valeurs aux extrémités des intervalles*, la fonction elle-même étant obtenue en reliant ces points de définition par des segments de droite.

Nous voyons donc que si :

$$W(x) = P(y),$$
$$W'(x) = P'(y),$$

on aura :

$$Q(x) = W * W' = P(y)\ P'(1/y)\,. \tag{25}$$

On remarquera que $P^*(y)$ étant le polynôme *réciproque* de P au sens de Peterson [7], on a, modulo $(y^{2^k} - 1)$:

$$P(1/y) = y\ P^*(y)\,.$$

V.3. Produits de convolution des fonctions de Walsh.

V.3.1. Il résulte de ce qui précède que le produit de convolution de deux fonctions de Walsh est défini par le produit des représentations polynômiales en y et $1/y$ de ces deux fonctions. En développant ce produit, modulo $(y^{2^k} - 1)$, on obtiendra un polynôme à coefficients réels :

$$Q(y) = c_0 + c_1\,y + \dots\ c_{2^k-1}\,y^{2^k-1}\,,$$

c_0 est la valeur du produit de convolution à l'origine, c_1 sa valeur à la fin de l'intervalle n° 1, ... c_{2^k-1}, sa valeur à la fin de l'intervalle n° $(2^k - 1)$ qui est le dernier de la période.

Le produit de convolution lui-même sera représenté par une ligne brisée joignant ces valeurs (Fig. 8).

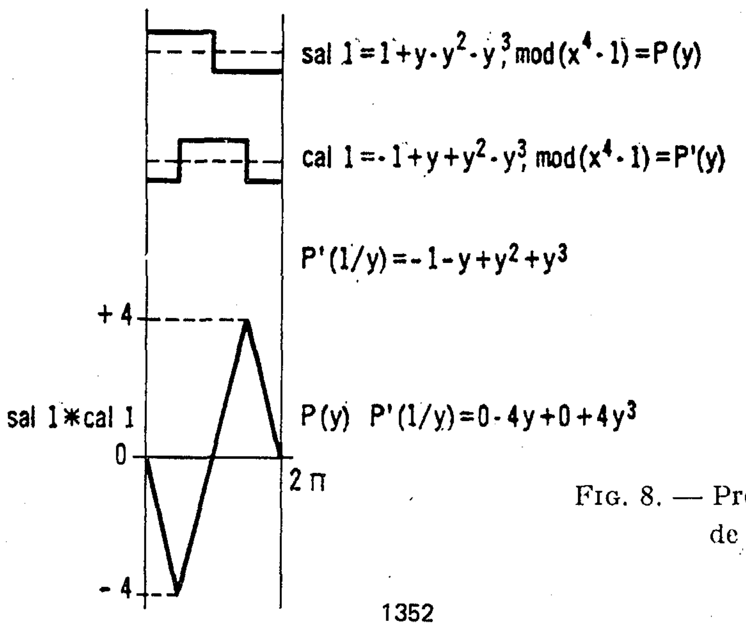


FIG. 8. — Produit de convolution de deux fonctions de Walsh.

V.3.2. Nous écrirons alors les polynômes P(y) et P′($1/y$) sous la forme factorisée (18) et nous effectuerons le produit des facteurs correspondants, de même degré en y dans P(y) et en $1/y$ dans P′($1/y$).

Le produit obtenu, qui définit le produit de convolution des fonctions de Walsh considérées, sera le produit de k facteurs de la forme :

$$F_{2^p}(y) = [(1 \pm y^{2^p})(1 \pm (1/y)^{2^p})].$$

Ces facteurs ont *a priori* l'une des quatre formes suivantes :

$$(26) \quad (1 + y^{2^p})(1 + 1/y^{2^p}) = 2 + y^{2^p} + 1/y^{2^p},$$

$$(27) \quad (1 - y^{2^p})(1 + 1/y^{2^p}) = (1/y^{2^p}) - y^{2^p},$$

$$(28) \quad (1 + y^{2^p})(1 - 1/y^{2^p}) = y^{2^p} - 1/y^{2^p},$$

$$(29) \quad (1 - y^{2^p})(1 - 1/y^{2^p}) = 2 - y^{2^p} - 1/y^{2^p}.$$

Les formes (27) et (28) sont *identiques au signe près.* Si donc nous négligeons le signe du produit de convolution, chacun des k facteurs dont il se compose ne peut avoir *que trois formes* 1

— la forme + 1 [ou (26)] s'il est le produit de 2 facteurs ayant le signe + ;

— la forme — 1 [ou (29)] s'il est le produit de 2 facteurs ayant le signe — ;

— la forme 0 [c'est-à-dire (27) ou (28) s'il est le produit de 2 facteurs ayant des signes contraires.

Or les signes successifs qui figurent dans les polynômes P(y) et P′($1/y$) sont les représentations en code Gray des rangs des fonctions de Walsh correspondantes (+ correspondant à 0 et — à 1).

Si, donc, nous définissons comme suit la *C-addition de deux nombres binaires de* k *chiffres, pour obtenir un nombre ternaire de* k *chiffres,* ces derniers pouvant valoir 0, + 1 ou — 1, par les règles d'addition suivantes, chiffre par chiffre et sans retenue :

$$(30) \quad \begin{aligned} &1 \underset{c}{+} 1 = +1, \\ &0 \underset{c}{+} 0 = -1, \\ &1 \underset{c}{+} 0 = 0 \underset{c}{+} 1 = 0, \end{aligned}$$

nous aboutissons au :

Théorème. — *Le produit de convolution de deux fonctions de Walsh est défini, au signe près, par la C-somme de leurs rangs, écrits en code binaire réfléchi.*

Il en résulte immédiatement qu'*il ne peut exister que 3^k produits de convolution distincts dans l'ensemble des 2^k premières fonctions de Walsh,* ce nombre étant celui des nombres ternaires différents, de k chiffres (le nombre total des produits de convolution possibles *a priori* étant 4^k).

V.3.3. Définition des termes identiques dans la matrice universelle de diaphonie.

Nous avons démontré que, dans l'ensemble complet des 2^k premières fonctions de Walsh, il pouvait exister *au plus* 3^k produits de convolution distincts (au signe près). Mais nous savons qu'il existe un certain de ces produits qui sont identiquement nuls (produits de convolution entre fonctions appartenant à des classes de diaphonie ayant des valeurs différentes de k_0). Nous allons démontrer que le nombre de produits de convolution distincts *est exactement 3^k pour une classe de diaphonie contenant 2^k fonctions de Walsh.*

V.3.3.1. *Le produit de convolution de deux fonctions de Walsh est identiquement nul si et seulement si le dernier chiffre ternaire de la C-somme de leurs rangs, écrits en code Gray, est 0.*

En effet, le calcul montre immédiatement que dans le cas où la C-somme se termine par un zéro, le facteur $F_{2}k - 1(y)$ dans le produit $Q(y)$ est égal à 0 modulo $(y^{2^k} - 1)$.

Si ce chiffre est + 1, ce facteur est égal à :

$$2\, y^{2k-1}\ ;$$

si ce chiffre est — 1, ce facteur est égal à :

$$-\, 2\, y^{2^{k-1}}\ ,$$

et dans ces deux derniers cas, $Q(y)$ ne peut pas être identiquement nul, quelle que soit la forme des autres facteurs $F_k(y)$ de degré inférieur.

V.3.3.2. *Deux polynômes* $Q(y)$ *non nuls ne peuvent être identiquement égaux s'ils ont un ou plusieurs facteurs* $F_h(y)$ *différents avec* $h \leqslant 2^{k-2}$.

Ceci résulte du fait que, dans l'anneau considéré, un polynôme *de degré inférieur à* 2^{k-1} ne peut être factorisé que d'une seule manière : les critères de divisibilité de l'algèbre ordinaire demeurent valables tant qu'aucun terme n'atteint le degré 2^k.

Si nous considérons maintenant uniquement les fonctions de Walsh appartenant à *une même classe de diaphonie*, nous avons démontré que leurs produits de convolution mutuels *n'étaient pas nuls*. Les C-sommes différentes correspondront donc à des produits de convolution différents, et réciproquement, *à l'intérieur d'une même classe.*

Les classes de diaphonie étant toutes isomorphes, nous étudions ci-après *la première classe de fonctions paires*, c'est-à-dire la série des fonctions cal $(2\,p + 1, x)$ ayant pour séquence la série successive des entiers impairs.

Dans l'expression binaire simple de leur rang, le dernier élément binaire est 0 (puisque ce sont des fonctions de Walsh paires) et l'avant-dernier élément binaire est 1 (puisque leur séquence est impaire).

Les éléments binaires suivants, à partir de l'antépénultième, définissent le *numéro d'équivalence* e, écrit en base binaire ordinaire.

Il est aisé de voir, au moyen des formules (23) que si l'on écrit les rangs N en code Gray, le dernier élément binaire est toujours 1.

La séquence de la fonction variant de 2 unités lorsque l'on passe d'une fonction à la suivante, il résulte des mêmes formules que :

— l'avant-dernier élément binaire de rang écrit en Gray change de valeur,

— un autre parmi les éléments binaires précédant l'avant-dernier change aussi de valeur.

On voit donc finalement que l'antépénultième élément binaire et ceux qui le précèdent à gauche définissent *la transcription en code Gray du numéro d'équivalence* (la première fonction ayant pour numéro d'équivalence 0, lequel est représenté, en binaire simple comme en binaire réfléchi par $k - 2$ zéros, et un seul élément binaire dans ce groupe changeant de valeur lorsque l'on passe d'une fonction à la suivante).

Il en résulte le

Théorème. — *La C-somme des numéros d'équivalence, écrits en code binaire réfléchi, définit de manière univoque le produit de convolution de deux fonctions de Walsh appartenant à la même classe d'équivalence diaphonique, et leur courbe de diaphonie.*

Il existe donc exactement 3^k fonctions de diaphonie distinctes (au signe près) dans la classe d'équivalence contenant 2^k fonctions de Walsh.

Il y a donc $4^k - 3^k$ relations d'égalité entre les termes de cette matrice, parmi lesquelles $2^{2k-1} - 2^{k-1}$ résultent simplement de la symétrie de la matrice et :

$$N_k = 2^{2k-1} + 2^{k-1} - 3^k ,$$

résultent de l'égalité entre produits de convolution de *couples différents* de fonctions de Walsh.

V.3.4. Programmation.

La figure 9 représente l'organigramme d'un programme exploitable sur la calculatrice déjà citée, qui permet de tracer les produits de diaphonie de la classe d'équivalence contenant 8 fonctions. On n'a représenté qu'un seul des produits égaux, tels que $P_{N,N'}$ et $P_{N'N}$.

Cette classe est la plus grande dans le groupe des 32 premières fonctions de Walsh.

La figure 10 représente ces produits de convolution sur un quart de période. Chaque produit de convolution doit être complété par antisymétrie autour de son extrémité droite et par symétrie autour de son extrémité gauche.

Harmuth avait précédemment publié [5, pp. 152-153] une table analogue relative à la classe d'équivalence contenant 4 fonctions.

V.3.5. *Emplacement des relations d'égalité.*

La figure 10 correspond à la moitié inférieure de la matrice (symétrique) dont chaque terme est un produit de convolution.

Les relations d'égalité autres que celles résultant de la symétrie sont représentées par la figure 11 (deux cases reliées par un trait correspondent au même produit de convolution au signe près et à la même courbe de diaphonie).

L'emplacement des relations d'égalité dans la matrice à 2^{p+1} lignes et colonnes, soit A_{p+1}, se déduit de l'emplacement desdites relations dans la matrice A_p par la construction récursive indiquée figure 12 : TA_p représente la matrice A_p retournée (en écrivant les colonnes dans l'ordre inverse) et les deux matrices TA_p qui s'introduisent dans A_{p+1} ont leurs éléments symétriques reliés par une relation d'égalité (puisque la matrice A_{p+1} est symétrique).

V.3.6. *Relation avec la somme directe des rangs.*

Si l'on représente semblablement les égalités dans la table d'addition directe $N \oplus N'$ des 2^p premiers nombres binaires, soit A'_p, on constate que la même construction récursive peut être appliquée, mais que la matrice A'_1 (Fig. 13 *a*) comporte une relation de plus que la matrice A_1 (Fig. 13 *b*).

On obtient ainsi une démonstration géométrique simple du

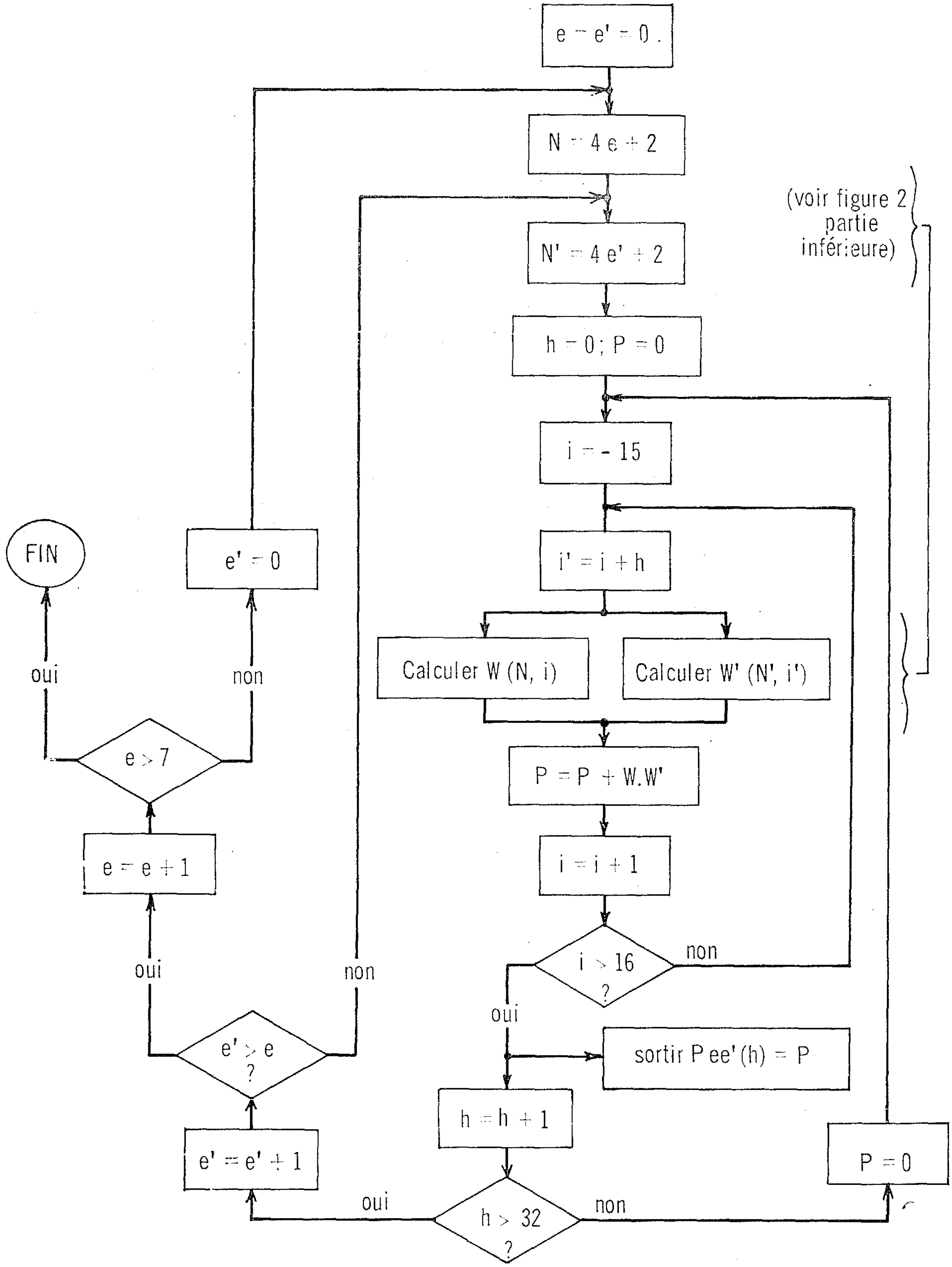


FIG. 9. — Organigramme d'un programme permettant de tracer les produits de diaphonie de la classe d'équivalence contenant 8 fonctions.

Théorème. — *Pour que deux couples de fonctions de Walsh fournissent le même produit de convolution (au signe près), une condition* nécessaire, mais non suffisante, *est que la somme directe des rangs écrits en code binaire simple soit la même pour ces deux couples.*

VI. CONCLUSION

L'introduction d'une représentation trigonométrique simple et d'une représentation polynomiale des fonctions de Walsh a permis d'aboutir à un calcul exact de leur spectre de fréquence et de leurs produits de convolution mutuels.

Ces résultats théoriques conduisent à des formules permettant d'obtenir la diaphonie résultant du filtrage dans un multiplex à porteuses Walsh.

Dans une prochaine étude, nous complèterons ces résultats par la définition des coefficients d'influence de l'erreur de synchronisation, coefficients que l'on obtient à partir de la pente au départ des produits de convolution.

Les résultats essentiels du présent travail ont été présentés à l'Académie des sciences par M. M. Ponte, le 20 décembre 1971 [8].

Manuscrit reçu le 22 *novembre* 1971.

REMERCIEMENTS.

L'auteur est heureux de remercier ici Monsieur Patrick Lebail, Ingénieur en chef, de son amicale collaboration.

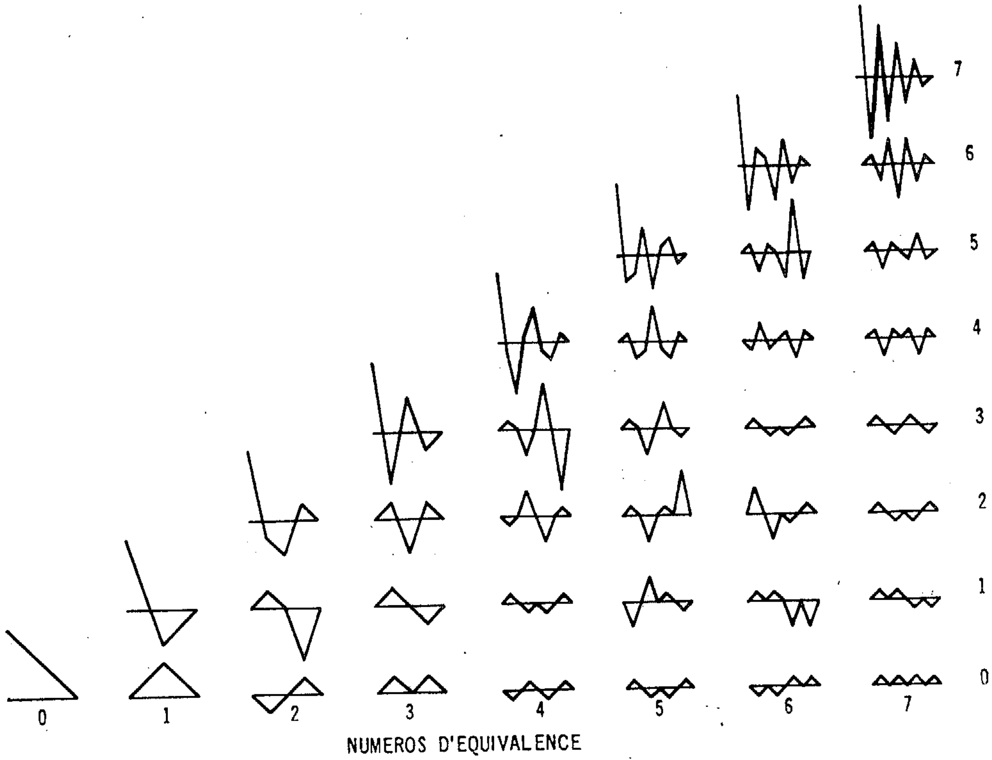


FIG. 10. — Produits de convolution sur un quart de période.

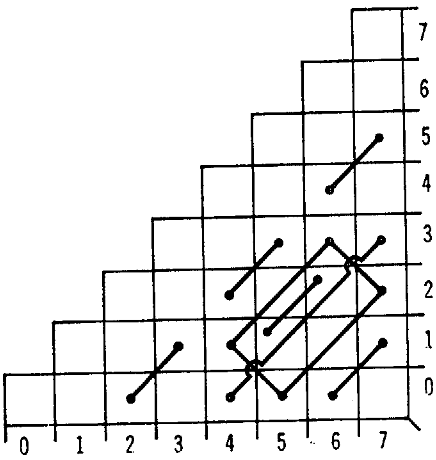


FIG. 11. — Représentation matricielle des relations d'égalité.

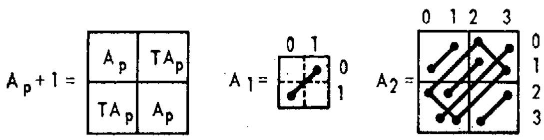


FIG. 12. — Construction par récurrence de la matrice A_{p+1}.

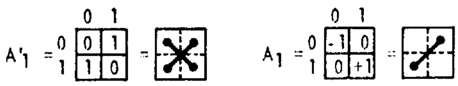


FIG. 13. — Matrices de départ : A'_1 et A_1.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Hadamard (J.). Résolution d'une question relative aux déterminants. *Bull. Sci. math.*, Fr. (1893), série 2, p. 171.

[2] Pratt (W. K.), Kane (J.), Andrews (H. C.). Hadamard transform image coding (Codage des images à l'aide de la transformée de Hadamard). *P.I.E.E.E.*, U. S. A. (janv. 1969), **57,** n° 1, pp. 58-68.

[3] Lackey (R. B.), Meltzer (D.). A simplified definition of Walsh functions (Définition simplifiée des fonctions de Walsh). *I.E.E.E. Trans C*, U. S. A. (févr. 1971), **20,** n° 2, pp. 211-213.

[4] Schreiber (H. H.). Bandwidth requirements for Walsh functions (Bande passante nécessaire à la transmission des fonctions de Walsh). *I.E.E.E. Trans., IT*, U. S. A. (juil. 1970), **16,** n° 4, pp. 491-493.

[5] Harmuth (H. F.). Transmission of information by orthogonal functions (Transmission de l'information par des fonctions orthogonales). *Springer*, New York (1969), 322 p.

[6] Ville (J.). Théorie et applications de la notion de signal analytique. *Câbles et Transmis.*, Fr. (1948), **2,** n° 1, pp. 61-74). (Hors commerce.)

[7] Peterson (W. W.). Error correcting codes (Codes correcteurs d'erreurs). *John Wiley*, New York (1961), 285 p.

[8] Cardot (C.). Définition analytique non récursive des fonctions de Walsh-Hadamard. Application à la détermination de leurs propriétés spectrales. *C.R. Acad. Sci., A*, Fr. (3 janv. 1972), **274,** n° 1, pp. 66-69.

LES FONCTIONS DE WALSH ET LEURS PROPRIETES SPECTRALES.

Bibliographie [illegible]

(1) [illegible], F. HARMUTH - Transmission of Information by orthogonal functions.

Seconde édition, 1972, Springer Verlag, Berlin.

(2) Remplacer la référence (7) ci-dessus par : W.W PETERSON et E.J. WELDON Jr. - [illegible]

Seconde édition, considérablement augmentée ; M.I.T. Press, Cambridge, Mass 1972.

(3) Cl. [illegible] CARPOT - Etude de l'influence de l'erreur de synchronisation sur le fonctionnement d'un multiplex à porteuses WALSH.

Annales des Télécommunications, mars-avril 1972, pp. 91-94.

On trouvera dans cet article le calcul de la diaphonie introduite par un défaut de synchronisation, à partir des résultats théoriques relatifs aux produits de convolution entre fonctions de WALSH.

[illegible] mars 1972