ASPECTS D'UN MODELE DISCRETISE DE L'EXTRACTION D'UN SIGNAL GAUSSIEN NOYE DANS UN BRUIT GAUSSIEN

D. de BRUCQ - Maitre de Conférences à l'Université de Rouen

I - PRESENTATION DU MODELE

On se propose de traiter par calculateur digital la détection d'un signal aléatoire S de loi gaussienne centrée, noyé dans un bruit aléatoire gaussien B. La détection optimale passe par le calcul d'un résumé exhaustif RE dont l'existence est assurée sous certaines conditions afin que les lois gaussiennes images par B et par B+S soient équivalentes ([7] P.180). Sous cette forme, le problème a été résolu théoriquement sous réserve d'un algorithme simple pour effectuer la détection (6).

Entre le milieu physique où se propage le signal, et l'observateur, se situe un appareillage de détection qui introduit un nouveau processus Z d'observation. A l'aide d'une expérience qui consiste en la donnée d'une trajectoire ($z(t)$; $t \in R_+$) du processus Z, il s'agit de décider entre l'existence du bruit B seul (hypothèse H_0) et l'existence du signal S additionné au bruit (hypothèse H_1) et ceci dans le temps le plus court possible.

Il a été montré (2) que la théorie du filtrage appliquée une fois sous H_0 et une deuxième fois sous H_1 donnait les différentes espérances, conditionnellement à la connaissance de l'observation Z, qui interviennent dans l'expression du résumé exhaustif.

Afin d'utiliser les équations théoriques de filtrage dans une application numérique, une discrétisation du temps s'impose qui a conduit (2) à deux difficultés :

La matrice de covariance de l'erreur $\Theta(t)$ d'estimation d'un vecteur Θ d'état, est de type positif d'après sa définition

$$\Sigma(t/t) \overset{\Delta}{=} E|\tilde{\Theta}(t/t)\, \tilde{\Theta}\,(t/t)^*| \text{ avec}$$

$$\tilde{\Theta}(t/t) \overset{\Delta}{=} \Theta(t) - E\,(\tilde{\Theta}(t)/Z(\tau)=z(\tau),\ \tau < t)$$

La théorie du filtrage conduit à l'équation différentielle -dite de Riccati- :

$$\frac{d\Sigma(t/t)}{dt} = M\,\Sigma(t/t) + \Sigma(t/t)\,M^* + \varepsilon\varepsilon^* - \Sigma(t/t)\,\frac{C^*C}{\rho^2_{r,r}}\,\Sigma(t/t)$$

où les diverses matrices M, $\varepsilon\varepsilon^*$, C^*C et le scalaire $\rho_{r,r}$ seront définis ultérieurement

Or la discrétisation de l'équation de Riccati par les méthodes habituelles d'analyse numérique ne conduit pas à une solution matricielle de type positif ! le caractère symétrique de la solution se conserve cependant. La signification probabiliste de la solution est ainsi perdue par discrétisation.

Dans l'expression du résumé exhaustif RE, intervient une intégrale stochastique à calculer sous H_0 et à calculer sous H_1. Comment discrétiser l'intégrale stochastique

$$\int_0^t C\, E(\Theta(s)/Z\,(\tau)=z(\tau);\ \tau \leq s)\ \ dz(s)$$

On obtient soit l'intégrale de H_0 soit l'intégrale de Stratanovich, soit une intégrale intermédiaire par des approximations du type Riemann-Stieltjes en faisant varier les points ξ_i où est prise la fonction à intégrer, la subdivision pointée de l'intégrale de Riemann-Stieltjes vérifie rappelons-le

$$0 = t_1 < \xi_1 < t_2 < \xi_2 < t_3 \ .....< t$$

pour l'intervalle (0,t)

Afin de résoudre ces divers problèmes, nous sommes partis d'une simulation discrétisée.

II - EQUATIONS DE SIMULATION

Le bruit B est un vecteur dont la dimension sera choisie afin que le modèle théorique décrive de façon satisfaisante le bruit expérimental. Afin de pouvoir mesurer les caractéristiques de celui-ci et d'utiliser les résultats obtenus on supposera le bruit stationnaire. Une théorie abstraite est nécessaire pour expliquer l'origine du bruit si le bruit n'est pas stationnaire ; les résultats expérimentaux ne pouvant qu'identifier des lois de probabilité indépendantes du temps. La stationnarité du bruit permet d'utiliser la théorie des processus du second ordre (3), (4), (8). Le bruit B est une fonction aléatoire de moyenne nulle, stationnaire, de covariance

$$\forall\ t,\tau \in R \quad E(B(t)\ B^*(t+\tau)) = \Gamma(\tau)$$

Ce processus est supposé gaussien. Dans ce cas, la stationnarité de la loi du bruit par translation du temps, est équivalente à la stationnarité du second ordre :

$E(B(t))$, $E(B(t)\ B^*(t+\tau))$ indépendantes du temps t.

Pour tout processus vectoriel du second ordre, on introduit la fonction spectrale de puissance (5) par la formule

$$\Gamma(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda\tau}\ dF(\lambda)$$

La condition $\int_{-\infty}^{+\infty} |\Gamma(\tau)|d\ \tau < \infty$, vérifiée par la plupart des processus expérimentaux entraine ((8)P.45) l'existence d'une densité spectrale de puissance $f(\lambda)$ satisfaisant

$$\Gamma(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda\tau}\ f(\lambda)\ d\lambda$$

Pour une situation expérimentale donnée, la densité spectrale de puissance s'obtient directement à partir d'enregistrement de bruit, et le modèle théorique du bruit sera choisi en comparant la densité spectrale expérimentale et la densité spectrale déduite du modèle.

Nous supposons de plus que le bruit vérifie une équation différentielle stochastique linéaire vectorielle de dimension p

$$dB = A\ B\ \ dt + \beta d\Gamma$$

où A est une matrice constante p x p et où β est une matrice diagonale positive p x p.

Le processus $(\Omega, \mathfrak{a}, P, (\eta t)_{R+}, R, \mathcal{R})$ est un processus de Wiener vectoriel. Les expressions de la covariance $\Gamma(\tau)$ et de la densité spectrale $f(\lambda)$ sont connues en fonction des matrices A et β (2). Le bruit

$B = (\Omega, \mathfrak{a}, P, (B_t)_{R+}, R, \mathcal{R})$ est un processus de Markov.

L'extraction du signal s'effectue au moyen d'un calculateur digital et passe par une discrétisation des grandeurs à traiter. Afin d'avoir une théorie cohérente n'introduisant aucune erreur de discrétisation, nous partons d'un modèle discrétisé de bruit. Soit Δt l'intervalle de discrétisation du temps

$$\forall n \in N \quad B(n+1) = B(n) + A\ B(n)\Delta t + \beta\ \eta(n)\sqrt{\Delta t} \quad (1)$$

Le processus de Wiener η est remplacé par une suite $\Gamma(n)$; $n \in N$ de variables aléatoires vectorielles indépendantes gaussiennes ; chaque variable $\Gamma(n)$ est centrée et de covariance

$$E\ (\eta(m)\ \eta(n)^* = \delta_{m,n}\ I$$

Le facteur $\sqrt{\Delta t}$ exprime en temps discrétisé, la propriété

$\forall\ t,\tau \in R_+ \quad E(\eta(t)\ \eta(t+\tau) = \tau I$ du processus de Wiener.

La densité spectrale de puissance est définie de la même manière que le temps soit discrétisé ou non. Prenons la forme qui se prêtera le mieux au passage à la limite $\Delta t \to 0$. Soit :

$$E(B(p)\ B^*(p+n)) = \int_{-\frac{\pi}{\Delta t}}^{+\frac{\pi}{\Delta t}} e^{in\Delta t\lambda} f(\lambda)d\lambda \quad p,n \in N$$

Sur les expressions classiques ((1)P.297), nous avons remplacé λ par $\lambda\Delta t$ et la densité spectrale est étalée de façon continue sur l'intervalle

$$\left[-\ 2\pi\ \frac{1}{2\Delta t}\ ,\ \ 2\pi\ \frac{1}{2\Delta t}\right]$$

La dimension du vecteur B est arbitraire dans une étude théorique. Pour passer à un programme de simulation, nous particularisons la dimension à deux.

Les signaux considérés sont également supposés gaussiens.

Le problème de la détection est aisée lorsque l'énergie du signal est grande devant celle du bruit aussi un système raffiné ne se conçoit que pour les situations limites : le signal devient de plus en plus petit, le signal augmente à partir d'une valeur indétectable. Ainsi contrairement au bruit, le signal est un processus non stationnaire et les situations transitoires sont celles à étudier.

La simulation part d'un signal nul à l'instant initial. Prenons des équations de signal semblables à celles du bruit

$dS = E\ Sdt + \gamma d\nu$ et sous forme discrétisée

$$S(n+1) = S(n) + E\ S(n)\ \Delta t + \gamma\ \nu(n)\ \sqrt{\Delta t} \quad n \in N$$

avec E matrice de dimension q x q et γ matrice diagonale positive de dimension q x q. Un signal sinusoïdal d'amplitude et de phase inconnues ne relève pas de ce modèle mais le vecteur

ASPECTS D'UN MODELE DISCRETISE DE L'EXTRACTION D'UN SIGNAL GAUSSIEN NOYE DANS UN BRUIT GAUSSIEN

D. DE BRUCQ - Maitre de Conférences à l'Université de Rouen

$$S_1(t) = A(\omega) \cos (2\pi \nu t + \phi(\omega))$$

$$S_2(t) = A(\omega) \sin (2\pi \nu t + \phi(\omega))$$

pour une loi de probabilité du couple (A,ϕ) convenable, relève du modèle.

La forme discrétisée

$$S_1(n) = S_1(0) \cos(2\pi\nu n\Delta t)-S_2(0)\sin(2\pi\nu n\Delta t)$$

$$S_2(n) = S_1(0) \sin(2\pi\nu n\Delta t)+S_2(0) \cos(2\pi\nu n\Delta t)$$

a pour solution un signal exactement sinusoïdal d'amplitude et de phase inconnues vérifiant :

$$S_1(0) = A(\omega) \cos (\phi(\omega))$$

$$S_2(0) = A(\omega) \sin (\phi(\omega))$$

Pour respecter le caractère gaussien centré du processus S, supposons

$$\left| \begin{matrix} S_1(0) \\ S_2(0) \end{matrix} \right. \quad \text{vecteur gaussien centré}$$

La fréquence ν du signal est supposée connue. La détection relève à la fois de la technique du filtrage de Bucy-Kalman et de la technique du filtre adapté sur un signal de fréquence donnée ν.

Nous faisons l'hypothèse des petits mouvements pour la réception ce qui implique la linéarité entre l'entrée et la sortie de l'appareillage de réception. Un bruit supplémentaire s'ajoute. Pour décrire la réception, nous prenons à nouveau un système différentiel linéaire stochastique vectoriel, de dimension r

$$dZ = FZ\, dt + K\Theta d\dot{t} + HS dt + \rho d\chi$$

ou sous forme discrétisée

$$\forall n \in N \quad Z(n+1)=Z(n)+(FZ(n)+K\Theta(n)+HS(n))\Delta t+\rho\chi(n)\sqrt{\Delta t}$$

avec F,K,H matrices r x r et ρ matrices diagonales positives r x r. Précisions que les processus de Wiener

$\nu \stackrel{\Delta}{=} (\Omega,\mathcal{A},P\ (\nu_t)_{R_+},R,R)$ et $\chi \stackrel{\Delta}{=} (\Omega,\mathcal{A},P(X_t),R,R)$ ont été discrétisés par des suites $(\nu(n), n\in N)$ et $(\chi(n), n\in N)$ de vecteurs aléatoires gaussiens centrés et indépendants.

III - PROPRIETES DU MODELE ET EQUATIONS DE FILTRAGE

Dans ce paragraphe, <u>les résultats de l'étude mathématique</u> sont rassemblés.

<u>Proposition 1</u> : Si pour un entier p de N, le bruit B(p) est un vecteur gaussien de moyenne E(B(p)) alors pour tout $n\in N$, B(n+p) qui vérifie l'équation (1), s'écrit

$$B(n+p) = (I + A\Delta t)^n B(p) + \sum_{j=0}^{n-1} (I+A\Delta t)^j \beta\eta(n+p-j-1) \sqrt{\Delta t}$$

de moyenne $E(B(n+p)) = (I + A\, \Delta t)^n E(B(p))$

<u>Proposition 2</u> : Pour que $\forall$ p, $n\in N$, la covariance du bruit $E(B(p)\ B^*(p+n))$ ne dépende que de n, il faut et il suffit que

$= E(B(0)\ B^*(0))$ vérifie l'équation

$$A\,\Gamma+ \Gamma A^* + A\Gamma A^* \Delta t + \beta\beta^* = 0$$

Pour le modèle particulier de bruit satisfaisant l'équation différentielle stochastique simplifiée :

$$\begin{pmatrix} B_1(n+1) \\ B_2(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1(n) \\ B_2(n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1(n) \\ B_2(n) \end{pmatrix} \Delta t + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \eta_2(n) \end{pmatrix} \sqrt{\Delta t}$$

l'équation de stationnarité en Γ est linéaire :

$$2\,\Gamma_{2,1} + \Gamma_{2,2}\, \Delta t = 0$$

$$a_{2,1}\Gamma_{1,1} + a_{2,2}\Gamma_{2,1} + \Gamma_{2,2} + (a_{2,1}\Gamma_{2,1} + a_{2,2}\Gamma_{2,2})\,\Delta t = 0$$

$$2(a_{2,1}\Gamma_{2,1} + a_{2,2}\Gamma_{2,2})+(a_{2,1}^2\Gamma_{1,1} + 2a_{2,2}a_{2,1}\Gamma_{2,1} + a_{2,2}^2\Gamma_{2,2})\,\Delta t + \beta_2^2 = 0$$

La solution de l'équation (1) doit être stable. La simulation du bruit consiste à engendrer pour n = 0, un vecteur gaussien centré de covariance Γ pour assurer la stationnarité. Ensuite à chaque pas, le terme B(n+1) provient du terme $(I+A\Delta t)B(n)$ auquel s'ajoute $\beta\,\eta(n)\sqrt{\Delta t}$ terme aléatoire gaussien centré de covariance $\beta\beta^*\Delta t$. Le procédé doit se poursuivre indéfiniment et par conséquent ne doit pas diverger.

<u>Proposition 3</u> : Si les valeurs propres de la matrice $(I+A\Delta t)$ sont strictement majorées en module par +1, alors $\forall$p, $n\in N$

D. DE BRUCQ - Maitre de Conférence à l'Université de Rouen

$$E(B(p)) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{h=1}^{k} B(p+h)$$

$$E(B(p)B^*(p+n)) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{h=1}^{k} B(p+h)B^*(p+n+h)$$

Appliquons ce résultat au modèle simplifié.

Proposition 4 : Pour la matrice

$A \overset{\Delta}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$, soit $a_{2,2}^2+4a_{2,1} \geq 0$ soit $a_{2,2}^2 + 4a_{2,1} \leq 0$. Les conditions $4+2a_{2,2}\Delta t-a_{2,1}\Delta t^2>0$, $a_{2,1} < 0$, $-4<a_{2,2}\ \Delta t<0$ dans le premier cas ou $a_{2,2} < a_{2,1}\ \Delta t$ dans le second cas, impliquent pour $I + A\ \ \Delta t$ d'avoir des valeurs propres strictement majorées en module par +1.

Le calcul de la densité spectrale devient aisée dans ces conditions.

Proposition 5 : Si le bruit $(B(n), n\in N)$ vérifiant (1) est stationnaire et stable, alors il a une densité spectrale $f(\lambda)$ vérifiant $\forall\lambda\in \left[- 2\pi \frac{1}{2\Delta t} , 2\pi\frac{1}{2\Delta t}\right]$.

$$[(e^{i\Delta t\lambda}-1)I-A\Delta t|f(\lambda)|(e^{-i\Delta t\lambda}-1)I-A^*\Delta t] = \frac{\Delta t^2}{2\pi}\beta\beta^t$$

Dans le cas du modèle simplifié, la partie principale de f pour un développement en Δt, vaut :

$$f_{1,1}^{(0)}(\lambda) = \frac{\beta_2^2}{2\pi|(\lambda^2+a_{2,1})^2 + a_{2,2}^2\lambda|}$$

L'ajustement entre le bruit expérimental et le bruit théorique s'effectue par comparaison des densités spectrales. D'après la courbe expérimentale de la densité $f_{exp}(\lambda)$, on calculera $a_{2,1}$ et $a_{2,2}$ pour ajuster au mieux $f(\lambda)$ théorique et $f_{exp}(\lambda)$. Ces deux paramètres restent libres : la stationnarité et l'hypothèse supplémentaire $\Gamma_{1,1} = 1$, fixent uniquement la valeur numérique de β_2.

La stabilité doit également être écrite pour le signal et pour l'observation. Il suffit de transposer ce qui a été indiqué pour le bruit.

Passons aux équations de filtrage dont l'obtention découle du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Procédons au changement de notations pour faire apparaitre le vecteur d'état Θ et l'observation $Y = Z_{r,r}$ à une dimension.

$$\begin{pmatrix}\Theta\\Y\end{pmatrix} \overset{\Delta}{=} \begin{pmatrix}B\\S\\Z\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} M & N \\ C\Delta t & 1+D\Delta t\end{pmatrix} \overset{\Delta}{=} 1 + \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ K & H & F\end{pmatrix}\Delta t$$

$$\begin{pmatrix}\varepsilon & 0\\ 0 & \rho_{r,r}\end{pmatrix} \overset{\Delta}{=} \begin{pmatrix}\beta & 0 & 0\\ 0 & \gamma & 0\\ 0 & 0 & \rho\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}W\\ \chi_{r,r}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\eta\\ \nu\\ \chi\end{pmatrix} \quad \text{d'où}$$

$$\begin{pmatrix}\Theta(n+1)\\Y(n+1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & N \\ C\Delta t & 1+D\Delta t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Theta(n)\\Y(n)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\varepsilon & 0\\ 0 & \rho_{r,r}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}W(n)\\ \chi_r(n)\end{pmatrix}\sqrt{\Delta t}$$

Dans le cas de l'hypothèse H_o, la partie relative au signal n'intervient pas. Les équations de filtrage valent classiquement :

F_1 $\quad S(n) = C\Sigma\ (n-1/n-1)\ \ C^*\ \Delta t + \rho_{r,r}^2$

F_2 $\quad \Sigma(n/n) = M\ \Sigma(n-1/n-1)\ M^* + \varepsilon\varepsilon^*\ \Delta t - M\Sigma\ (n-1/n-1)\ \frac{C^*C}{S(n)}\ \Sigma(n-1/n-1)M^*\Delta t$

F_3 $\quad Y(n)-\hat{Y}(n/n-1) = Y(n)-Y(n-1)-C\hat{\Theta}(n-1/n-1)\Delta t - DY(n-1)\Delta t$

F_4 $\quad L(n)e_n\Delta t = M\hat{\Theta}(n-1/n-1)+N\ Y(n-1)\Delta t+L(n)e_n\Delta t$

F_5 $\quad \hat{\Theta}(n/n) = M\hat{\Theta}(n-1/n-1)+N\ Y(n-1)\Delta t+L(n)e_n\Delta t$

La détection s'effectue entre l'hypothèse H_o : l'appareillage n'est excité que par le bruit et l'hypothèse H_1 : l'appareillage est excité par le bruit et par le signal. L'équation différentielle stochastique $dZ = F\ Zdt + K\ Bdt + HSdt + \rho d\chi$ décrit cette situation suivant que la matrice H est nulle ou non. La discrétisation permet le calcul direct des lois de probabilité du vecteur observation $(Y(1), Y(2), \dots, Y(n))$ aléatoire gaussien centré, sous l'hypothèse H_o et sous l'hypothèse H_1.

Pour toute variable aléatoire T, on appelle μ_T sa loi de probabilité et $\frac{d\mu_T}{dx} = f_T$ sa densité de probabilité quand elle existe, par rapport à la mesure de Lebesgue. La variable T peut être vectorielle de dimension n et les mesures sont prises dans R^n.

Supposons l'existence $\forall j = 1, 2, \dots n$, de $f_{Y_j/Y_{j-1}, \dots, Y_1}$ densité de probabilité par rapport à la mesure de Lebesgue dx de la variable aléatoire Y_j, étant données les variables aléatoires $Y_1, Y_2, \dots, Y_{j-1}$. Nous

D. DE BRUCQ - Maitre de Conférences à l'Université de Rouen

avons l'égalité $\forall\ (y_1, \ldots y_n) \in R^n$

$$f_{Y_1,Y_2,\ldots,Y_n}(y_1,\ldots y_n) = f_{Y_1}(y_1) f_{Y_2/Y_1=y_1}(y_2)$$

$$\ldots\ldots f_{Y_n/Y_1=y_1\ldots Y_{n-1}=y_{n-1}}(y_n)$$

d'après le théorème des probabilités conditionnelles.

En passant au logarithme, nous obtenons une formule additive et récursive.

Le calcul effectif d'un résumé exhaustif RE entre l'hypothèse H_o et l'hypothèse H_1 a été réalisé. Donnons en le résultat :

$$RE(n) = \sum_{j=1}^{n} (\Delta\, RE^1(j) - \Delta RE^0(j))$$

$$\Delta RE^i(j) = -\frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{C\Sigma^{(i)}(j-1/j-1)C^* \Delta t}{\rho^2_{r,r}}\right)$$

$$+\frac{1}{2}(y_j - y_{j-1})^2 \frac{C\Sigma^{(i)}(j-1/j-1)\ C^*}{\rho^2_{r,r}\ (C\Sigma^{(i)}(j-1/j-1)C^*\Delta t + \rho^2_{r,r})}$$

$$+ (y_j - y_{j-1}) \frac{[C\hat{\Theta}^{(i)}(j-1/j-1) + Dy_{n-1}]}{C\Sigma^{(i)}(j-1/j-1)\ C^*\Delta t + \rho^2_{r,r}}$$

$$- \frac{1}{2} \frac{[C\hat{\Theta}^{(i)}\ (j-1/j-1) + Dy_{n-1}]^2}{C\Sigma^{(i)}\ (j-1/j-1)\ C^*\ \Delta t + \rho^2_{r,r}}$$

Nous voyons que $RE(n) = RE(n-1) + \Delta RE^1(n) - \Delta RE^0(n)$ qui traduit la récursivité. Le calcul de ΔRE s'effectue une fois sous l'hypothèse H_1 d'où l'indice $i = 1$ et une seconde fois sous l'hypothèse H_o d'où $i = 0$.

IV - CONCLUSION

Le passage à la limite lorsque Δt tend vers zéro s'effectue en conservant l'égalité $n\ \Delta t = t$. On obtient en utilisant les théorèmes de convergence probabiliste, la convergence presque sur des processus discrets $B(n)$, $S(n)$, $Z(n)$ vers les processus en temps continus $B(t)$, $S(t)$, $Z(t)$.

De même à la limite le résumé exhaustif a pour expression

$$RE\ (t) = \int_0^t (C\hat{\Theta}^{(1)}(s/s) + D\ y(s)) \frac{dy(s)}{\rho^2_{r,r}}$$

$$- \frac{1}{2} \int_0^t (C\hat{\Theta}^{(1)}(s/s) + D\ y(s))^2 \frac{ds}{\rho^2_{r,r}}$$

$$- \int_0^t (C\hat{\Theta}^{(0)}(s/s) + Dy(s)) \frac{dy(s)}{\rho^2_{r,r}} + \frac{1}{2} \int_0^t (C\hat{\Theta}^{(0)}(s/s)$$

$$+ Dy(s))^2 \frac{ds}{\rho^2_{r,r}}$$

où apparaissent des intégrales stochastiques. Nous avons obtenus par le modèle discrétisé, une approximation de l'intégrale, cohérente avec les propriétés probabilistes du modèle.

De la même manière, les équations F_1 et F_2 constituent la discrétisation de l'équation de Riccati en temps continu :

$$\frac{d\Sigma}{dt} = M\Sigma + \Sigma M^* + \varepsilon\varepsilon^* - M\Sigma \frac{C^*C}{\rho^2_{r,r}} \Sigma M^*$$

Les équations F_1 et F_2 conduisent à une solution matricielle symétrique de type positif dont le sens probabiliste reste clair.

Afin de ne pas surcharger l'exposé, les résultats numériques seront présentés lors de la communication orale.

NOTATION

Θ^* Matrice adjointe - Matrice conjuguée et transposée de la matrice Θ

$\mathcal{R}$ Tribu des boréliens de l'ensemble R des nombres réels

E Espérance mathématique pour l'espace $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ de probabilité : $E(X) \stackrel{\Delta}{=} \int_\Omega X(\omega) P(d\omega)$

$E(\Theta(t)/Z(\tau), \tau \leq t)$ Espérance mathématique du vecteur Θ pris à l'instant t conditionnellement à la famille de variables aléatoires $Z(\tau)$ pour $\tau \leq t$

$L^2(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ Espace de Hilbert des variables aléatoires réelles de carrés intégrales. On note la norme par $||X(\omega)|| \stackrel{\Delta}{=} \int_\Omega |X(\omega)|^2 P(d\omega)$

BIBLIOGRAPHIE

|0| - J.R. BARRA - Notions fondamentales de statistiques mathématiques - Dunod 1971

|1| - J. BASS - Cours de mathématiques Tome 1 - Masson et Cie

|2| - D. DE BRUCQ - Une application en théorie du signal des équations de filtrage linéaire. Quatrième colloque sur le traitement du signal et ses applications - Nice 7 au 12 mai 1973

|3| - R. FORTET - Cours de D.E.A. 1970-1971 Paris VI

|4| - GIKHMAN-SKOROKHOD - Introduction to the theory of Random Processes - W.B. Saunders Company 1969

|5| - LOEVE Probability theory - Van Nostrand New-York 1955

|6| - E. MOURIER - Détermination du rapport de vraisemblance pour la détection d'un signal gaussien dans un bruit non stationnaire. Troisième colloque sur le traitement du signal et ses applications Nice du 1er au 5 juin 1971

|7| - J. NEVEU - Processus aléatoires gaussiens - Les presses de l'Université de Montréal été 1968

|8| - S.M. YAGLOM - Theory of stationary Random functions - Frentice Hall 1965