DIXIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 20 au 24 MAI 1985

REPRESENTATION TEMPS-FREQUENCE : DEFINITION D'UNE DENSITE ENERGETIQUE ET REALISATION PHYSIQUE DE FILTRES BIDIMENSIONNELS

Guy LEBRETON

GESSY Université de TOULON 83130 LA GARDE FRANCE

RESUME

En raison du principe d'incertitude, les représentations temps-fréquence de signaux unidimensionnels ne conduisent jamais à une densité énergétique (réelle et positive) dans le plan temps-fréquence. Il apparaît dans la présente étude qu'une distribution énergétique en représentation conjointe t-f doit nécessairement, pour avoir les propriétés d'une densité (dérivée d'une fonction de répartition), être la Transformée de Fourier bidimensionnelle d'une fonction caractéristique de deux variables indépendantes.

Cette fonction caractéristique est obtenue en introduisant une variable "retard" entre le signal et une "fenêtre glissante" d'analyse. On peut alors définir une densité énergétique, qui apparaît comme la traditionnelle Représentation de Wigner (RW) du signal, filtrée (à deux dimensions) par la RW de la fenêtre. La fonction caractéristique correspondante est donc le produit des fonctions d'Ambiguïté respectives de la fenêtre et du signal. La résolution dans le plan t-f est ainsi arbitrairement mais physiquement définie, pour l'une des variables (t ou f), par le choix de la fenêtre d'analyse; pour l'autre variable, la résolution découle alors simplement de l'application du principe d'incertitude.

Ces résultats définissent une expression généralisée de la cellule élémentaire t-f pour les représentations du type Gabor, la forme du "logon" étant alors choisie arbitrairement mais construite physiquement. Toute l'étude est développée à partir d'une définition très générale du signal, considéré comme un processus stochastique non-stationnaire dont la représentation-temps est une distribution (au sens mathématique défini par L. Schwartz et I.M. Gelfand).

SUMMARY

Due to the uncertainty principle, time-frequency representations of one-dimensional signals never lead to an energy density (real and positive) in the time-frequency plane. It is shown here that an energy density distribution in time and frequency has to be the two-dimensional Fourier Transform of a characteristic function of two independent variables.

This characteristic function is obtained by introducing a "delay" variable between the signal and some analysing aperture (sliding window). The resulting energy density is expressed as the conventional Wigner representation (WR) of the signal, 2-D filtered by the RW of the aperture. The related t-f characteristic function is thus a product between the Ambiguity functions respectively of the signal and the aperture. The resolution in the t-f plane is then arbitrarily but physically defined from the analysing aperture for one variable (time or frequency); for the other variable, the resolution simply results from the uncertainty principle.

These results yield a generalized expression of the t-f elementary cell for Gabor-type representations, the "logon" shape being arbitrarily decided but physically constructed. The whole study is performed on the basis of an extensive definition for the signal, considered as a non-stationnary stochastic process with its time-representation (or any other 1-D physical variable) defined as a distribution (in the mathematical sense as defined by L. Schwartz and I.M. Gelfand).

1. Introduction

Si les représentations temps-fréquence ont prouvé leur efficacité dans de nombreuses applications, leur formulation théorique s'est toujours heurtée au principe d'incertitude. Une nouvelle approche évitant cette difficulté nous a été suggérée par la pratique du traitement optique de signaux S(t) transformés en image bidimensionnelle S(t,t') par un balayage de type télévision. Nous avons observé [1] que cette mise à deux dimensions était nécessaire pour l'obtention des représentations temps-fréquences classiques, du type $U_S(t,f)$, par transformation de Fourier unidimensionnelle (TF-1D). La présente étude a pour objectif de donner à cette observation pratique une justification théorique aussi large que possible.

2. Espace-signal

Nous prendrons comme point de départ l' "espace-signal" E défini par G. Bonnet [2] , dont nous rappelons succintement le formalisme.

E_0, sous-espace de L^2 (classes de fonctions de carré sommable), est l'ensemble des signaux $|\phi\rangle$ dont les représentations-temps appartiennent à l'espace S de Schwartz (fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide) et muni du produit scalaire hermitique, signaux dont la TF (transformation de Fourier) appartient aussi à S et est définie par une intégrale. On notera :

$$\langle t|\Phi\rangle = \langle t, \Phi\rangle = \Phi(t) \overset{\nu}{\underset{t}{\rightleftharpoons}}$$

$$\langle \nu|\Phi\rangle = \langle \nu, \Phi\rangle = \phi(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t)\, e^{-i2\pi\nu t}\, dt$$

L'espace-signal E est l'ensemble des formes linéaires sur E_0, dont les représentations-t appartiennent au dual de S, c'est-à-dire à l'espace S' des distributions tempérées, possédant donc aussi une TF dans S' (mais non définie par une intégrale):

$$\langle \Phi| X\rangle = \langle \Phi(t), X(t)\rangle = \langle \phi(\nu), x(\nu) = \langle X|\Phi\rangle^{*}$$

Aux vecteurs $|t\rangle$ et $|\nu\rangle$, formant respectivement des bases complètes de E, correspondent les observables $\hat{t}$ et $\hat{\nu}$(au sens de la mécanique quantique) dont les valeurs propres associées t et ν sont des grandeurs physiques mesurables. Ces opérations sont susceptibles d'une représentation -t ou -f (reliées par TF) :

$$\hat{t}'|t\rangle = t'(t) = \langle t|t'\rangle = \delta(t-t')$$

$$\hat{t}'|\nu\rangle = t'(\nu) = \langle \nu|t'\rangle = e^{-i2\pi\nu t'}$$

$$\hat{\nu}'|t\rangle = \langle t|\nu'\rangle = e^{i2\pi\nu' t}$$

$$\hat{\nu}'|\nu\rangle = \langle \nu|\nu'\rangle = \delta(\nu-\nu')$$

La valeur moyenne de $\hat{t}$ en représentation-f est l'époque de groupe de J. Ville [3], dont on calcule aisément la représentation-f.

$$\langle X|\hat{t}|X\rangle_{(\nu)} = \langle \frac{i}{2\pi}\frac{d}{d\nu}\rangle$$

qui conduit au commutateur

$$[\hat{t}, \hat{\nu}] = |\hat{t}\hat{\nu} - \hat{\nu}\hat{t}| = \frac{i}{2\pi}$$

dont on déduit l'expression du principe d'incertitude appliqué aux écarts quadratiques moyens $\Delta\hat{t}$ et $\Delta\hat{\nu}$:

$$\Delta\hat{t}\cdot\Delta\hat{\nu} \geq \left|\frac{i}{2}[t,\nu]\right| = \frac{1}{4\pi}$$

L'action d'un opérateur linéaire A sur un signal $|X\rangle$ de E, en utilisant la règle de Fubini pour les distributions, s'exprime par le produit tensoriel contracté dans S' :

$$\langle\Phi|A|X\rangle = \langle\ \langle\Phi(t), A(t,t')\rangle, X(t')\ \rangle$$
$$= \langle\langle\ \Phi(t), A(t,t') \times X(t')\ \rangle\rangle$$

Nous utiliserons également les opérateurs unitaires de translation-temps D(t') ou fréquence D(ν'), qui sont des fonctions des opérateurs $\hat{t}$ et $\hat{\nu}$:

$$D(t') = e^{-i2\pi\hat{\nu}t'} = g(\hat{\nu})$$

$$D(\nu') = e^{i2\pi\nu'\hat{t}} = h(\hat{t})$$

Explicitons par exemple l'action du premier en représentation -t. Son commutateur avec $\hat{t}$ s'écrit :

$$[\hat{t},D(t')] = [\hat{t},\hat{\nu}]g'(\hat{\nu}) = \frac{i}{2\pi}\cdot(-i2\pi t')g(\nu) = t'\cdot D(t')$$

$$\hat{t}\ D(t')|t\rangle = D(t')\cdot\hat{t}\ |t\rangle + t'\ D(t')|t\rangle$$
$$= (t+t')\ D(t')|t\rangle$$

ce qui signifie que $D(t')|t\rangle$ est vecteur propre de $\hat{t}$ avec la valeur propre t+t' , soit :

$$D(t')|t\rangle = |t+t'\rangle$$

$$\langle t|\ D(t') = \langle t-t'|$$

3. Opérateur de covariance

Toujours avec G. Bonnet [1], on peut définir l'opérateur de covariance associé à un signal $|X\rangle$ de E par l'espérance mathématique de l'opérateur densité (au sens de la mécanique quantique).

$$\Gamma_X = E\{\ |X\rangle\langle X|\ \}$$

dont la représentation temps, qui appartient à S', est le produit tensoriel :

(1) $\Gamma_X(t,t') = E\{X(t) \times X(t')\}$ défini par

(2) $\langle\Phi|\Gamma_X|\Phi\rangle = \langle\langle\Phi(t)\,\Phi^{*}(t'), \Gamma_X(t,t')\rangle$

La définition (1) pour une distribution tempérée se réduit à celle de A. Blanc-Lapierre et R. Fortet [4] lorsque X(t) est une fonction aléatoire du second ordre, le produit tensoriel devenant alors un produit simple. Comme pour toute distribution tempérée, elle possède une transformée de Fourier (bidimensionnelle):

(3) $\Gamma_X(f,f') = E\{x(f) \times x^{*}(-f')\}$

Si la covariance est stationnaire, l'opérateur correspondant, invariant par translation-temps, devient un filtre linéaire, qui commute avec l'opérateur D(t') et dont la représentation -t devient le produit de convolution au sens des distributions :

(4)
$$\langle\Phi|\Gamma|\Phi\rangle = \langle\langle\Phi(t)\ \Phi^{*}(-t'), \Gamma_X(t-t')\rangle\rangle$$
$$= \langle\Phi(t) \underset{(t')}{*} \Phi^{*}(-t), \Gamma_X(t')\rangle$$
$$= \langle\Phi(t)\ , E\{X(t) \times X^{*}(t-t')\}$$

soit pour un signal ergodique :

(5) $\Gamma_X(t') = X(t) * X^{*}(-t)$

Il nous paraît cependant nécessaire de préciser avec Schwartz [5] que la convolution n'est pas définie dans S'. S'agissant de processus à loi temporelle, dont l'existence physique implique la condition de causalité, les expressions (4) et (5) sont valides car la convolution est définie entre distributions à support borné à gauche. Par contre la TF de (5) n'existera que si $X(t) \quad O'_C$ (distributions à décroissance rapide). On pourra alors écrire la TF :

$$(6) \quad \Gamma_X(f) = E\{x(f) \cdot x^*(f)\} = E\{|x(f)|^2\}$$

qui appartient à l'espace O_M des fonctions indéfiniment dérivables à croissance lente. De plus, la covariance étant définie positive d'après (4), il résulte du théorème de Bochner que l'expression (6), également positive, est la dérivée d'une fonction réelle monotone R(f). Comme le signale G. Bonnet, cette fonction R(f) s'identifie à la fonction de répartition spectrale de A. Blanc-Lapierre [4] et l'expression (6) devient une densité spectrale énergétique si le signal est d'énergie finie. On peut remarquer d'après Schwartz (relation VII.9 ; 18) que dans ce cas la covariance est elle-même une fonction continue, qui s'identifie donc à une fonction caractéristique. On peut alors écrire selon le théorème de Parseval :

$$E\{\int |x(f)|^2 \, df\} = E\{\int |X(t)|^2 \, dt\} < C < +\infty$$

c'est-à-dire que la trace de l'opérateur de covariance est finie.

En outre, pour que la covariance puisse prendre la forme corrélative (5) avec pour TF une fonction, il faut (d'après Schwartz, op. c.,Chap.7, Théor.XX) que X(t) appartienne à l'espace D'_{L^2}.

4. Représentations t-f associées à la covariance

Avec J. Bendat et A. Piersol [6], on peut se donner une expression centrée de la covariance qui possède les mêmes propriétés que la définition classique mais se prête à des transformations de Fourier unidimensionnelles :

$$(7) \qquad \Gamma'(t,t') = \left(t + \frac{t'}{2}, \; t - \frac{t'}{2}\right)$$

Cette expression s'étend comme la précédente à l'espace-signal E, donnant la distribution tempérée :

$$(8) \quad \Gamma'(t,t') = E\{X(t + \frac{t'}{2}) \times X^*(t - \frac{t'}{2})\}$$

et sa TF - 2D

$$(9) \quad \gamma(f,f') = E\{X(f + \frac{f'}{2}) \times X^*(f - \frac{f'}{2})\}$$

Dans le cas des fonctions aléatoires de second ordre, ces auteurs et de façon plus systématique W.D. Mark [7] en déduisent par TF-1D des expressions généralisées de la fonction d'ambiguïté symétrique ainsi que de la fonction de Wigner (reliées par TF-2D)

$$(10) \qquad A(f',t') = \int \Gamma'(t,t') \, e^{-i2\pi f't} \, dt$$

$$(11) \qquad W(t,f) = \int \Gamma'(t,t') \, e^{-i2\pi ft'} \, dt'$$

avec :

$$\Gamma'(t,t') = E\{X(t + \frac{t'}{2}) \, X^*(t - \frac{t'}{2})\}$$

Il est également possible d'effectuer ces TF-1D sur l'expression (8) généralisée à S', par une opération du type :

$$(12) \quad \ll F/t'\{\Phi(t+\frac{t'}{2})\Phi^*(t-\frac{t'}{2})\}, E\{X(t+\frac{t'}{2}) \times X^*(t-\frac{t'}{2})\}\gg$$

$$= \ll \Phi(t+\frac{t'}{2})\Phi^*(t-\frac{t'}{2}), \; F/t' \; E\{X(t+\frac{t'}{2}) \times X^*(t-\frac{t'}{2})\}\gg$$

qui définit :

$$(13) \quad A(f',t') = F/t \; E\{X(t+\frac{t'}{2}) \times X^*(t-\frac{t'}{2})\} = F/t \; \Gamma'(t,t')$$

$$(14) \quad W(t,f) = F/t' \; \Gamma'(t,t')$$

On ne peut appliquer les mêmes transformations dans le cas général à l'expression (1) assymétrique $\Gamma(t,t')$, car la TF-1D ne porterait plus alors sur les deux termes du produit tensoriel. Mais cela devient possible si la covariance est stationnaire et le signal à énergie finie X(t) appartient à D'_{L^2} puisque nous avons vu que la covariance est alors une fonction permettant d'écrire directement les intégrales :

$$(15) \quad \chi_X(f',t') = \int E\{X(t) \, X^*(t-t')\} \, e^{-i2\pi f't} \, dt$$

$$(16) \quad \varepsilon(t,f) = E\{X(t) \, X^*(f) \, e^{-i2\pi ft}\}$$

qui deviennent pour un évènement certain X(t) Les expressions classiques de la fonction d'ambiguïté assymétrique (15) et de la "densité énergétique complexe" (16) définie par A. Rihaczek [8] . Ces deux expressions sont bien entendu reliées par TF-2D.

Notons enfin que les relations (13) à (16) sont également valables pour généraliser les représentations croisées correspondantes, TF-1D de la covariance mutuelle :

$$(17) \quad \Gamma'_{12}(t,t') = E\{X_1(t) \times X_2^*(t')\}$$

à laquelle s'étendent immédiatement toutes les propriétés de la covariance propre vues au paragraphe 3.

Les définitions ainsi obtenues, plus générales que celle donnée par G. BONNET [9] pour les seules fonctions aléatoires de second ordre, appellent cependant la même remarque critique : elles n'ont de sens que dans un espace muni du produit scalaire et dont les éléments dépendent de deux variables. Il faut en effet qu'on puisse définir le module carré de chacune de ces expressions temps-fréquence, qui seul peut représenter des grandeurs énergétiques, nécessairement réelles et non-négatives. Ceci nous conduit à réexaminer maintenant les conditions d'existence d'une fonction caractéristique en représentation conjointe temps-fréquence.

5. Recherche d'une fonction caractéristique en représentation t-f

Nous avons observé au paragraphe 3 que la covariance s'identifiait à une fonction caractéristique d'une seule variable) si et seulement si le signal X(t) était d'énergie finie (6) et appartenant à l'espace D'_{L^2} muni d'une loi de convolution. On obtenait sinon une "distribution caractéristique", qui devenait une fonction si et seulement si (d'après la condition citée de Schwartz) la trace de l'opérateur diagonal associé était finie. En ce cas, ce dernier opérateur peut être normé en le divisant par sa valeur à l'origine (qui exprime l'énergie totale finie du signal) avec toutes les propriétés d'une densité énergétique localisée sur l'axe des fréquences.

Une fonction caractéristique de deux variables (t,f) ne sera donc définie qu'avec les mêmes restrictions, c'est-à-dire pour des covariances >o et d'énergie finie (espace D'_{L^2}). En ce cas, d'après le théorème de Bochner-Schwartz, la densité associée est une fonction continue à croissance lente, appartenant à l'espace O_M de Schwartz.

Si le signal est seulement de puissance finie, on pourra parler de distribution caractéristique >> 0, sous-espace de S', associée à une fonction de répartition spectrale de puissance, sans que sa TF-2D soit une véritable densité. On étend ainsi aux distributions les principes développés par A. Blanc-Lapierre [4] pour la localisation de l'énergie sur l'axe des fréquences dans le cas des fonctions aléatoires.

Dans les deux cas, la distribution caractéristique en représentation conjointe sera définie par la relation :

$$(18) \quad \phi(2\pi f', 2\pi t') = \langle d\,R(f,t)\ ,\ e^{i2\pi(f'\hat{t}+\hat{f}t')}\rangle$$

avec la fonction réelle continue de deux variables :

$$(19) \quad d\,R(t,f) = E\ \{d\,x(t,f) \times d\,x^*(t,f)\}$$

représentée par une matrice diagonale.

Il s'agit donc (conformément aux notions traditionnelles) de l'espérance mathématique de la moyenne, dans l'état $|dx\rangle$ fonction de t et f, de ce que nous appellerons ici l' "opérateur caractéristique", fonction des opérateurs non commutables $\hat{t}$ et $\hat{f}$. Si le signal est d'énergie finie, on peut exprimer une densité $\sigma(t,f)$ par :

$$(20) \quad d\,R(t,f) = \sigma(t,f)\,dt\,df = dx(t,f) \cdot dx^*(t,f)$$

produit de fonctions de O_M, d'où la fonction :

$$(21) \quad \phi(2\pi f', 2\pi t') = \langle dx|\ e^{i2\pi(f'\hat{t}+\hat{f}t')}\ |dx\rangle$$

La relation de TF-2D qui doit alors exister entre la fonction caractéristique $\sigma(-2\pi f', 2\pi t')$ et la densité énergétique $\sigma(t,f)$ ne devient apparente que si l'on calcule la fonction d'opérateurs qu'est l'opérateur caractéristique.

Le calcul de la moyenne de cet opérateur dans l'état $|X\rangle$ a été effectué par G. Bonnet [9] sur la représentation X(t) d'un signal déterministe appartenant à D'_{L^2}. Nous le résumerons succintement, en étendant la démonstration aux processus stochastiques. Avec les opérateurs définis au paragraphe 2, et en utilisant la formule de Glauber [10] :

$$E^{A+B} = E^A\,e^B\,e^{-1/2\,[A,B]}$$

on obtient aisément la distribution de D'_{L^2} :

$$(22) \quad K(2\pi f', 2\pi t') = E\ \{\langle X|\ e^{i2\pi(f'\hat{t}+\hat{f}t')}|X\rangle\}$$
$$= e^{i\pi f't'}\ E\ \{\langle X|\ e^{i2\pi f'\hat{t}}\ e^{i2\pi\hat{f}t'}\ |X\rangle\}$$
$$= e^{i\pi f't'}\ E\ \{\langle X|\ D(-f')\ D(t')\ |X\rangle\}$$
$$= e^{i\pi f't'}\ E\ \{\langle X^*(t),\ e^{i2\pi f't}\ X(t+t')\rangle\}$$

En effectuant le changement de variable $(t+t')=t_1$ on obtient avec G. Bonnet [9] :

$$(23) \quad K(2\pi f', 2\pi t') = e^{-i\pi f't'}\ \chi(-f',t')$$

Si par contre on remplace t dans (22) par $(t_1+t'/2)$, on obtient la fonction d'Ambiguïté symétrique (13) :

$$(24) \quad K(2\pi f', 2\pi t') = A(t',-f')$$

qui est la fonction caractéristique retenue par J.Ville [3] avec pour densité d'énergie dans le plan (t,f) sa TF-2D W(f',t'), c'est-à-dire la représentation de Wigner, généralisée ici aux processus stochastiques par les relations (12) et (14).

A la lumière de ce dernier résultat, il apparaît que l'opérateur caractéristique appliqué à une représentation X(t) fait correspondre par TF-2D les TF-1D, respectivement par rapport à t et t', de l'opérateur de covariance symétrique (8), $\Gamma(t,t')$.

D'autre part, A. Rihaczek [8] a montré que si l'on effectue une TF-2D à partir de l'autocorrélation de sa densité énergétique complexe (15), on obtient le module carré de la fonction d'Ambiguïté, dont on sait qu'il est sa propre TF-2D. Il résulte de ces deux remarques que la seule fonction caractéristique possible en représentation conjointe (et seulement pour des signaux d'énergie finie de D'_{L^2}) est en même temps la densité énergétique dans le plan (t,f) et réunit en une seule les autre représentations temps-fréquence classiques :

$$(25) \quad |A\ (-f',t')|^2 = |\ \chi(-f',t')\ |^2$$
$$= \varepsilon(-t,f) ** \varepsilon^*(-t,f)$$
$$= W(t,f) ** W(-t,-f)$$

A. Rihaczek observe que cette réponse, autocorrélation du signal translaté en temps et en fréquence, exprime seulement la sortie du filtre adapté. Elle concentre donc au maximum la distribution énergétique dans le plan (t,f) au point (o, o), sans nous donner aucune information sur la répartition de l'énergie dans le plan temps-fréquence.

En conclusion, il est impossible d'obtenir la représentation énergétique conjointe temps-fréquence d'un signal sans introduire au préalable par un filtrage les caractéristiques de résolution de l'analyse, soit en temps, soit en fréquence (la résolution sur la variable conjuguée étant alors définie par le principe d'incertitude). Cette conclusion, très proche de l'analyse intuitive de J. Ville [3], nous ramène finalement aux représentations t-f du type Gabor [11] généralisées depuis par M. Bastiaans [12] (ce dernier ayant été également guidé par une approche optique bidimensionnelle).

6. Représentation énergétique temps-fréquence d'un signal filtré

Nous venons de montrer qu'une fonction caractéristique en représentation conjointe était nécessairement le module carré de la TF/t de la représentation -t de la covariance du signal. Il en sera de même pour un signal filtré, mais les représentations énergétiques propres seront remplacées par les représentations d'interaction. Si H(t) est la réponse impulsionnelle du filtre, l'éventuelle fonction caractéristique t-f du signal filtré sera de la forme :

$$(26) \quad |A_{XH}\ (-f',t')|^2 = |F/t\ \Gamma'_{XH}(t,t')|^2$$

avec une covariance mutuelle centrée dont l'expression la plus générale s'écrit :

$$(27) \quad \Gamma'_{XH}\ (t,t') = E\ \{X(t+\frac{t'}{2}) \times H^*(t-\frac{t'}{2})\}$$

Comme nous l'avons déjà signalé, toutes les expressions des paragraphes 2 et 3 pour les grandeurs énergétiques propres d'un signal se généralisent ainsi à l'expression des grandeurs "d'interaction" (appelées aussi "croisées" ou "mutuelles").

Comme l'a montré M. Ackroyd [13] pour les signaux déterministes, on établit aisément, à partir de la relation de C. Stutt [14]

$$(28) \quad |A_{12}\ (f',t')|^2 \rightleftharpoons A_{11}(t,f) \cdot A_{22}^*(t,f)$$

le groupe de relations suivant, qui correspond pour les représentations d'interaction aux relations (25) démontrées pour les représentations propres :

$$(29) \quad |A_{XH^*}\ (f',-t')|^2 = |\ \chi_{XH^*}\ (f',-t')|^2$$
$$= \varepsilon_X(t,f) ** \varepsilon_H(-t,f)$$
$$= W_X(t,f) ** W_H(-t,-f)$$

Cette expression s'identifie au "spectre physique de W.D. MARK [7] , résultat de l'analyse spectrale à fenêtre glissante, que pour des fonctions aléatoires de second ordre il écrit :

$$(30) \quad S_X(f',t';H) = E\{|\int_{-\infty}^{+\infty} H(t'-t)X(t)e^{-i2\pi f't}\, dt|^2\}$$

$$= E\{|X_{XH^*}(f',-t')|^2\}$$

En effet, l'espérance mathématique du produit du signal X(t) par la fenêtre d'analyse mobile H(t'-t) est bien la covariance mutuelle, qui dans l'hypothèse d'ergodicité se traduit par une fonction de corrélation déterministe :

$$(31) \quad \Gamma_{XH^*}(-t') = E\{ H(t'-t)\ X(t)\} = \int H(t'-t)\ X(t)\, dt$$

exprimant l'action du filtre linéaire sur le signal X(t). On peut résumer les expressions (28) à (31) par :

$$(32) \quad P(f',-t') = A_X(f',-t') \cdot A_H(f',-t') \underset{2D}{\rightleftarrows}$$

$$|A_{XH^*}(-t_1',f_1')|^2 = W_X(t,f) ** W_H(-t,-f)$$

avec :

$$(33) \quad A_{XH^*}(-t_1',f_1') = F/t_1\ E\{X(t_1+\frac{t_1'}{2}) \times H(t_1-\frac{t_1'}{2})\}$$

Les relations (32) seront valables dans le cas général d'une distribution tempérée X(t) moyennant les conditions suivantes :

- le produit des fonctions d'Ambiguïté A_X et A est défini si A_H est une fonction indéfiniment dérivable,
- la convolution des représentations de Wigner est définie si W_H appartient à l'espace O'_C de Schwartz, c'est-à-dire si sa TF-2D A_H appartient à l'espace O_M des fonctions indéfiniment dérivables à croissance lente.

Il suffit donc que A_H appartienne à O_M. La pondération H(t) étant déterministe, sa covariance centrée Γ'_H , stationnaire et invariante par translation, se réduit au produit tensoriel :

$$\Gamma'_H(t,t') = \Gamma_H(t,t') = H(t) \times H(t-t')$$

d'où par TF-1D/t.

$$A_H(f',t') = h(f) \times h^*(f)$$

Pour que ce produit appartienne à O_M, il faut et il suffit que h(f) appartienne à O_M. Une condition suffisante d'après L. Schwartz (5) est que H(t) appartienne à D'_{L^1}, c'est-à-dire soit une distribution sommable sur R^n.

La distribution P(f',t') définie par la relation (32) ayant été définie de la façon la moins restrictive, il reste à préciser les conditions nécessaires pour qu'elle soit une fonction caractéristique. Il ne sera plus nécessaire de restreindre X(t) à D'_{L^2} , car P(f',t') ne s'exprime plus sous une forme corrélative.

La condition de positivité résulte immédiatement du théorème de Bochner-Schwartz, puisque la TF-2D de P(f',t') est le module carré de la fonction d'ambiguïté mutuelle de X et H^* . On a donc déjà une "distribution caractéristique", dont la TF-2D est une mesure >>o à croissance lente. La condition nécessaire et suffisante pour que l'opérateur P(f',t') soit une fonction continue est donc seulement que sa trace soit finie, c'est-à-dire, A_H étant sommable, que le signal |X> lui-même soit d'énergie finie.

On a ainsi obtenu l'expression générale de la fonction caractéristique en représentation conjointe temps-fréquence pour un signal X(t) de S', filtré par une fenêtre de pondération H(t) appartenant à D'_{L^1}(A_H(t) fonction indéfiniment dérivable à croissance lente), sous la seule condition que ce signal soit d'énergie finie. Cette fonction caractéristique s'exprime par le produit des fonctions d'Ambiguïté du signal et du filtre. La densité énergétique qui lui est associée dans le plan t-f est le module carré de la fonction d'Ambiguïté mutuelle du signal et du filtre; égale à la convolution des représentations de Wigner du signal et du filtre, elle représente la distribution de l'énergie du signal en temps et en fréquence. Cette représentation respecte le principe d'incertitude : la résolution en fréquence Δf est la TF de la réponse impulsionnelle du filtre, tandis que la résolution sur la variable conjuguée Δt est déterminée par le principe d'incertitude.

7. Conclusion

Les résultats de cette étude ne font qu'expliciter en termes de représentation conjointe t-f le procédé classique de l'analyse spectrale à fenêtre mobile. La densité énergétique dans le plan t-f que nous venons de formuler est exactement l'expression obtenue par B. Escudie en imposant à une représentation (t,f) quelconque la condition de positivité [15] , que nous avons seulement généralisée à des distributions tempérées aléatoires sans hypothèse sur la covariance.

Cette extension s'applique également aux travaux de M. Bastiaans [16] qui a généralisé la représentation de D. Gabor en remplaçant son logon élémentaire (la fonction de Gauss) par la représentation de Wigner d'une fenêtre glissante h(t) d'analyse spectrale. Au plan de l'approche optique évoquée dans l'introduction on a bien mis en évidence le résultat cherché. En effet, la densité énergétique obtenue est bien la TF-1D par rapport à t' d'un signal X(t) mis à deux dimensions par filtrage, du type :

$$g(t,t') = h(t-t') \cdot X(t)$$

$$= \delta(t-t') * |h(t)\ X(t+t')|$$

et c'est la raison pour laquelle la densité énergétique obtenue respecte le principe d'incertitude, car dans aucune des représentations temps-fréquence utilisées la variable fréquence n'a été la TF de la variable temps.

Références

1. G. LEBRETON, "Analyse spectrale optique multicanaux. Application au Sonar Passif"
Actes du 9ème Colloque GRETSI, Nice, 1983, T.2, p. 699-704.

2. G. BONNET, "Considérations sur la représentation et l'analyse harmonique des signaux déterministes ou aléatoires"
Ann. Tél. 23/3-4, 1968, p. 62-86.

3. J. VILLE, "Théorie et applications de la notion de signal analytique"
Câbles et Transm., 2e A, N° 1, 1948, p. 61-74.

4. A. BLANC-LAPIERRE et R. FORTET, "Théorie des fonctions aléatoires"
Edit. MASSON, Paris, 1953.

5. L. SCHWARTZ, "Théorie des distributions"
Edit. Hermann, Paris, 1966.

6. J.S. BENDAT, A.G. PIERSOL, "Random data : analysis and measurement procedure"
Wiley-Interscience, New-York, 1971.

7. W.D. MARK, "Spectral analysis of the convolution and filtering of non-stationnary stochastic processes"
J. Sound Vib., 11/1, 1970, p. 19-63.

8. A.W. RIHACZEK, "Signal energy distribution in time and frequency"
IEEE Trans. on Inf. Theory, 14/3, 1968, p.369-374

9. G. BONNET, "Extension de la notion de fonction d'Ambiguïté à des signaux aléatoires"
Ann. Tél., 23/5-6, 1968, p. 141-154.

10. C. COHEN-TANNOUDJI, B. DIU, F. LALOE, "Mécanique quantique"
T.1, Edit. HERMANN, Paris, 1977.

11. D. GABOR, "Theory of communication"
J. Inst. Elec. Eng., 93/3, 1946, p. 429-457.

12. M.J. BASTIAANS, "Signal description by means of a local frequency spectrum"
SPIE Proceed. Vol. 373, 1981, p. 49-62.

13. M.H. ACKROYD, "Short-time spectra and time-frequency energy distributions"
J.A.S.A. 50/5, 1971, p. 1229-1231.

14. C.A. STUTT, "Some results on real-part/imaginary-part and magnitude-phase relations in Ambiguity functions"
IEEE Trans. Inf. Theory, 10/32, 1964, p. 321-327.

15. B. ESCUDIE, "Représentation en temps et fréquence des signaux d'énergie finie : analyse et observation des signaux"
Ann. Tél., 34/3-4, 1979, p. 101-111.

16. M.J. BASTIAANS, "Optical generation of Gabor's expansion coefficients for rastered signals"
Optica Acta 29/10, 1982, p. 1349-1357.