DIXIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 20 au 24 MAI 1985

IDENTIFICATION DE PROCESSUS LINEAIRES FILTRES

Denis de BRUCQ, Richard GRISEL et Saïd CHAOUKI

Laboratoire Capteurs, Instrumentation et Systèmes,
UNIVERSITE DE HAUTE NORMANDIE, BP 67 76130 MONT-SAINT-AIGNAN

RESUME

Usuellement l'entrée d'un filtre linéaire causal est un bruit blanc stationnaire gaussien ; le spectre de la sortie fournit la réponse impulsionnelle du filtre. Cette entrée est généralisée en un bruit blanc stationnaire de Lévy. Ce nouveau modèle très simple permet d'ajuster non seulement les spectres mais également les moments d'ordre supérieur du modèle avec ceux du processus de sortie et d'identifier ainsi le processus de Lévy. Les processus sphériquement invariants constituent une classe particulière pour cette modélisation. Le logiciel est écrit en langage Pascal.

SUMMARY

Usually a stationary gaussian white noise is taken as a linear causal filter entry and the spectrum of the output gives the impulse response. Here we take a linear process which is white and stationary. By means of this simple model spectrum and moments of any order can be fitted with the output process. The spherically invariant processes is a special linear process. The identification logicial is written in Pascal language.

I - INTRODUCTION

De nombreux phénomènes physiques peuvent être modélisés par un filtre linéaire causal de réponse $G(t-s)$ à une impulsion δ_s survenue à l'instant s. Usuellement lorsque l'entrée du filtre est un bruit blanc, on rajoute que ce bruit blanc est gaussien et on détermine ainsi les moments de tous ordres du bruit blanc et par conséquent également de la réponse Z du filtre à ce bruit blanc gaussien.

Ainsi pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

(1) $M(2n) = E(Z(t)^{2n}) = \frac{2n!}{2^n n!} [E(Z(t)^2)]^n$

(2) $M(2n+1) = 0$

Une estimation statistique des divers moments s'effectue pour un processus stationnaire en supposant l'ergodicité par

(3) $M(2n) \backsimeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Z(t_i)^{2n}$ $\quad t_i$: N instants et l'hypothèse gaussienne conduisant aux relations (1) est souvent mise en défaut.

A partir de la fonction caractéristique $\forall u \in \mathbb{R}$

(4) $\varphi(u) = E(\exp iu\, Z(t)) = \exp -\frac{1}{2} u^2 E(Z(t)^2)$

on calcule la seconde fonction caractéristique $\forall u \in \mathbb{R}$

(5) $\Psi(u) \triangleq \log \varphi(u) = -\frac{1}{2} u^2 E(Z(t)^2)$

particulièrement simple et déterminant tout aussi bien la loi probabiliste de Z(t).

Usuellement ce n'est pas la sortie Z à un instant qui est observée mais tout au contraire, la moyenne en temps de Z, pondérée par une fonction $(f(t); t \in \mathbb{R})$ soit

(6) $\langle Z, f \rangle = \int Z(t)\, f(t) dt$ variable aléatoire gaussienne, centrée, de seconde fonction caractéristique :

(7) $\Psi(Z, f) = -\frac{1}{2} E(\langle Z, f \rangle^2)$.

En remplaçant f par uf, on voit réapparaître la variable auxilliaire $u \in \mathbb{R}$.

Avant tout calcul d'identification des lois probabiliste, l'échantillon statistique dont nous disposons, est normalisé afin que

$$E(\langle Z, f \rangle) = 0 \text{ et } E(\langle Z, f \rangle^2) = 1.$$

Nous allons introduire un processus L de Lévy comme entrée. En plus de la partie gaussienne antérieure s'ajoute un processus de saut conduisant à :

$Z(t) = \sum_{s_i \leq t} A_i\, G(t-s_i)$ où les instants aléatoire $(s_i ; i \in \mathbb{Z})$ constituent un processus ponctuel de Poisson et où les variables aléatoires $(A_i, i \in \mathbb{Z})$ sont de même loi et indépendantes deux à deux et indépendantes du processus ponctuel.

II - FONCTION CARACTERISTIQUE DU PROCESSUS DE LEVY FILTRE.

Remplaçons le bruit blanc gaussien par un bruit blanc de Lévy :

Un tel processus est défini à l'aide d'une mesure positive μ sur $\mathbb{R}^2$, (cf. T. Hida § 3).

Pour toute fonction g de carré intégrable vérifiant

(1) $\int_{\mathbb{R}^2} g(s)^2\, a^2\, d\mu(a,s) < \infty$ notons

(2) $L(g) = \int_{\mathbb{R}} g(s)\, dL(s)$ la variable aléatoire centrée de seconde fonction caractéristique:

(3) $\Psi(L(g)) = \int_{\mathbb{R}^2} (e^{iag(s)} - 1 - ia\, g(s))\, d\mu\, (a,s)$.

Le processus de Lévy comprend également une partie gaussienne de mesure ν :

(4) $B(g) = \int_{\mathbb{R}} g(s)\, dB(s)$ qui s'ajoute de façon indépendante au processus de sauts antérieur d'où

(5) $\Psi(L(g)) = -\frac{1}{2} \int g^2(s) d\nu(s) + \int (e^{iag(s)} - 1 - iag(s)) d\mu(a,s)$

$$= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \frac{e^{iag(s)} - 1 - iag(s)}{a^2}\, d\lambda\, (a,s)$$

où nous avons posé

(6) $d\lambda\, (a,s) \triangleq \delta_0(da) d\nu(s) + a^2 d\mu(a,s)$

L'expérience conduit à une statistique sur le processus Z :

(7) $\langle Z, f \rangle = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{]-\infty, t]} G(t-s) dL(s) \right] f(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \langle G, f \rangle dL(s)$

de seconde fonction caractéristique

(8) $\Psi(\langle Z, f \rangle) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{ia\langle G, f \rangle} - 1 - ia\langle G, f \rangle}{a^2}\, d\lambda\, (a,s)$

En généralisant $\forall u, v \in \mathbb{R}$ fà $f(t) \triangleq u\, \delta_{t_1}(t) + v\, \delta_{t_2}(t)$ il vient :

$\langle Z, f \rangle = uZ(t_1) + vZ(t_2)$

$\langle G, f \rangle = uG(t_1 - s) + vG(t_2 - s)$

La loi temporelle du processus Z est déterminée par (8) à partir de la mesure λ. Les développements en série, des fonctions caractéristiques précisent ce lien : $\forall p, q \in \mathbb{N}$

(9) $\varphi(u,v) = E(\exp i\, (uZ(t_1) + vZ(t_2)))$

$$= \sum_{p,q=0}^{\infty} i^{p+q} \frac{u^p}{p!} \frac{v^q}{q!} M(p,q) \qquad \text{où}$$

(10) $M(p,q) \triangleq E\,(Z(t_1)^p\, Z(t_2)^q)$ et

(11) $\Psi(u,v) \triangleq \log \varphi(u,v)$

$$= \sum_{p,q=0}^{\infty} i^{p+q}\, u^p\, v^q\, \varkappa(p,q) \quad \text{où}$$

(12) $\varkappa(p,q) = \int_{\mathbb{R}^2} G(t_1-s)^p\, G(t_2-s)^q\, a^{p+q-2}\, d\lambda(a,s)$.

L'égalité $\Psi(u,v)=\log\varphi(u,v)$ conduit à

$\varphi(u,v)\frac{\partial\Psi}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v)$ et aux relations $\forall r,s \in \mathbb{N}$

(13) $\varkappa(r,s)=M(r,s) - \sum_{p,q\in D(r,s)} C_r^p\, C_{s-1}^q\, M(p,q)\varkappa(r-p,s-q)$

où

(14) $D(r,s) \triangleq \{0,1,\dots,r\}\times\{0,1,\dots,s-1\}-\{(0,0)\}$

Ainsi à partir des moments $M(.,.)$, le calcul des $\varkappa(.,.)$ est possible.

Théorème II-1 : Si le noyau $(r,s)x(r',s')\mapsto\varkappa(r+r',s+s')$ symétrique n'est pas de type positif alors le processus Z ne peut provenir d'un processus de Lévy par filtrage linéaire causal.

Ce résultat est beaucoup moins restrictif que les conditions (I-1) sur les processus gaussiens.

Démonstration : D'après (12), les $\varkappa(.,.)$ sont les moments d'une mesure positive $a^{-2}d\lambda(a,s)$. ∎

Ce type de résultat s'étend considérablement : Au lieu d'un seul processus de Lévy filtré, considérons K processus de Lévy indépendants entrées de K filtres linéaires causaux différents. Ainsi avec des notations évidentes

(15) $Z(t)=\sum_{l=1}^{K} \int_{-\infty}^{t} G_l(t-s)\,dL_l(s)$

de seconde fonction caractéristique

(16) $\Psi(<Z,f>)=\sum_{l=1}^{K} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{ia<G_l,f>}-1-i<G_l,f>}{a^2}\, d\lambda_l(a,s)$.

Pour chaque intégrale du type (II-3), effectuons le changement de variables :

$(a,s) \rightarrow b\triangleq a<G_l,f> = a\int_s^{\infty} G_l(t-s)f(t)dt$.

Les diverses fonctions à intégrer deviennent toutes égales à $e^{iub}-1-iub$. En regroupant les mesures images et en tenant compte des éventuelles parties gaussiennes, nous obtenons

(17) $\Psi(u<Z,f>)= \int \frac{e^{iub}-1-iub}{b^2}\, d\gamma(b)$

où γ est une mesure convenable.

Proposition II-2 :

Si $\Psi(u<Z,f>)=\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(iu)^p}{p!}\varkappa(p)=\log E\,(\exp iu<Z,f>)$

la matrice

$$\varkappa \triangleq \begin{bmatrix} \varkappa(2) & \varkappa(3)\,..\,\varkappa(p)\,.. \\ \varkappa(3) & .. \\ \varkappa(p) & .. \\ .. & \end{bmatrix}$$ est symétrique

positive dès que l'observation Z est la somme de processus de Lévy, indépendants, filtrés linéairement et causalement.

Démonstration

En effet $\varkappa(p)= \int b^{p-2}\, d\gamma(b)$. ∎

A l'aide des moments $M(p)=E(<Z,f>^p)$ $p=0,1,\dots,2n+2$ le calcul des $\varkappa(p)$ $p=0,1,\dots,2n+2$ utilise (II-13) à une dimension. La mesure positive γ est connu à l'aide de ses divers moments. L'identification et l'approximation de γ dans ces conditions ont été amplement étudiées (cf. N.I. Akhiezer).

Problème des moments :

Si l'on dispose de 2n moments $m(0),\dots,m(2n-1)$ d'une mesure positive ν, on considère l'approximation

$\nu\triangleq\nu_1\delta_{b1}+\dots+\nu_n\delta_{bn}$ devant vérifier

$m(l)=b_1\nu_1+\dots+b_n\nu_n$ pour $l=0,1,\dots,2n-1$.

On considère le polynôme $P_n(b)$ n-ième polynôme de degré n lors de l'orthonormalisation de Gram-Schmidt des polynômes $1,b,\dots,b^n$. Alors les n zéros de P_n sont les divers $b_1,\dots,b_n$. Ensuite on résoud les n premières équations linéaires en $\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_n$.

III - CAS STATIONNAIRE, Identification de la réponse impulsionnelle

Afin de pouvoir estimer les divers moments à l'aide d'une trajectoire observée du processus Z, imposons à $\dot{Z}$ et par conséquent à L d'être stationnaires. La mesure $d\lambda(a,s)$ se décompose en :

(1) $d\lambda(a,s)=\sigma(da) \otimes ds$ (cf. de Brucq Prop H-II-2-3).

En posant

(2) $I(p,q)\triangleq \int_{\mathbb{R}} G(t_1-s)^p\, G(t_2-s)^q ds$ la formule (II-12) fournit l'expression

(3) $\int_{\mathbb{R}} a^{p+q-2}d\sigma(a)= \varkappa(p,q)/I(p,q)$

et la détermiantion de $d\sigma$ relève du problème des moments dès que la réponse impulsionnelle G est déterminée.

Passons maintenant à l'identification de G à partir des moments du second ordre de Z. Posons

(4) $\int_{-\infty}^{t} G(t-s)^2 ds = \int_0^{\infty} G(\theta)^2 d\theta=1$ d'où

(5) $\Gamma(\tau) \triangleq \frac{\varkappa(1,1)}{\varkappa(2,0)\,\varkappa(0,2)} = \int G(t_1-s)G(t_2-s)ds$ avec

(6) $t_2 \triangleq t_1-\tau$

La transformée de Fourier définit une mesure dF positive jouant le rôle d'une mesure spectrale

(7) $\Gamma(\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\nu\tau}dF(\nu)$. La discrétisation du temps est nécessaire, pour évaluer la fonction Γ. Si $\Delta T \in \mathbb{R}$ est la durée de discrétisation et si nous disposons de $Z(k\Delta T), k=0,\dots,N-1$, nous évaluons $M(.,.)$ (cf. I.3) d'où nous calculons Γ(cf. II.13) soit

(8) $\Gamma(0),\ \Gamma(\Delta T),\dots,\Gamma(p\Delta T)$

En supposant $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\Gamma(k\Delta T)|<\infty$, on introduit

(9) $\Gamma(k\Delta T)=\int_0^{\frac{1}{\Delta T}} e^{-i(k\Delta T)2\pi f}\rho(f)df$.

Approchons le filtre G par un modèle autorégressif de coefficients $1,a_1,\dots,a_p$ et b_0. La densité specrale de puissance vaut

$$(10)\quad \rho(f) = \frac{b_0^2\ \Delta T}{|1+a_1e^{2i\pi f\Delta T}+\dots+a_pe^{2i\pi pf\Delta T}|^2}$$

D'après le théorème de Shannon, cette fonction n'a à être fournie que pour f multiple de $\Delta\nu \triangleq 1/N\Delta T$.

A partir des covariances (8), les équations de Yule-Walker résolues par l'algorithme de Itakura permettent le calcul de $a_0,a_1,\dots,a_p$. Nous déduisons la réponse fréquentielle :

$$G(l\,\Delta\,\nu) = \frac{b_0}{1+a_1e^{2i\pi l\Delta T\Delta\nu}+\dots+a_pe^{2i\pi pl\Delta T\Delta\nu}}$$

et la transformée de Fourier inverse conduit à la connaissance de la réponse impulsionnelle G aux instants ΔT d'échantillonnage.

IV - CAS SPHERIQUEMENT INVARIANT STATIONNAIRE.

Pour le processus de sauts

(1) $dL(s)=\sum_{i\in\mathbb{Z}} A_i\,\delta_{s_i}(s)$

supposons que les diverses variables A_i soient de loi sphériquement invariante de mesure χ (cf. B. Picinbono)

$$(2)\quad E(\exp i A) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\frac{\sigma^2u^2}{2}}\,d\chi(\sigma)$$

En n'oubliant pas l'éventuelle partie gaussienne, il vient :

$$(3)\quad \psi(\langle Z,f\rangle)=\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+}\frac{e^{-\frac{\sigma^2\langle G,f\rangle^2}{2}}-1}{\sigma^2}(\sigma_0^2\,\delta(d\sigma)+\sigma^2d\chi(\sigma))ds$$

Proposition la mesure

$$(4)\quad d\lambda(a,s) \triangleq [\sigma_0^2\delta(da)+\int\frac{e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}d\chi(\sigma)a^2da]ds$$

conduit à l'égalité

$$\Psi(\langle Z,f\rangle) =\int_{\mathbb{R}^2}\frac{e^{ia\langle G,f\rangle}-1-ia\langle G,f\rangle}{a^2}\,d\lambda(a,s)$$

Démonstration :

$$\int_{\mathbb{R}^2}\frac{e^{ia\langle G,f\rangle}-1-ia\langle G,f\rangle}{a^2}[\int\frac{e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma}d\chi(\sigma)]a^2da\ ds =$$

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+}d\chi(\sigma)\ ds[\int_{\mathbb{R}}(e^{ia\langle G,f\rangle}-1-ia\langle G,f\rangle)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}da]=$$

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+}d\chi(\sigma)\ ds\ [e^{-\frac{\sigma^2\langle G,f\rangle^2}{2}}-1]$$

Le développant en série de u de la formule (3) en posant f=uf fournit :

(5) $\varkappa(2n+1)=0$

$$(6)\quad \varkappa(2n)=\frac{(2n)!}{2^n n!}\int_{\mathbb{R}}\langle G,f\rangle^{2n}ds\int_{\mathbb{R}_+}\sigma^{2n-2}d\chi(\sigma).$$

La mesure χ déterminant la loi sphériquement invariante provient à nouveau de la connaissance de ses divers moments. Remarquons cependant que des facteurs supplémentaires $\frac{(2n)!}{2^n\ n!}$ se sont rajoutés pour passer de la formule (II-12) $\varkappa(2n)=\chi(2n,0)$ à la formule (IV -6). De plus les moments d'ordre impair sont nuls.

Supposons que la mesure χ provienne du mélange statistique de deux lois gaussiennes centrées d'écart type σ_1 et σ_2 et de probabilités respectives p_1 et p_2, alors :

(7) $d\chi(\sigma)=p_1\,\delta_{\sigma_1}(\sigma)+p_2\delta_{\sigma_2}(\sigma)$

Ainsi il faut 4 équations pour déterminer les 2 probabilités p_1 et p_2 et les deux écarts types σ_1 et σ_2:

$$(8)\quad \begin{cases} p_1+\ p_2=\varkappa(2)/\int\langle G,f\rangle^2ds=1\\ \sigma_1^2\ p_1+\sigma_2^2p_2=\varkappa(4)/\int\langle G,f\rangle^4ds.\\ \sigma_1^4\ p_1+\sigma_2^4p_2=\varkappa(6)/\int\langle G,f\rangle^6ds.\\ \sigma_1^6\ p_1+\sigma_2^6p_2=\varkappa(8)/\int\langle G,f\rangle^8ds.\end{cases}$$

L'identification de la mesure λ définie en (4) s'avèrerait beaucoup plus délicate.
Un logiciel en Pascal est disponible sur demande.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N.I. **AKHIEZER**, The classical Moment Problem University Mathematical monographs. Oliver & Boyd LTD 1965.

[2] D. de **BRUCQ**, Cours de Théorie du Signal D.E.A. de Mathématiques Appliquées de Rouen. Rouen 1984.

[3] T. **HIDA**, Stationary Stochastic Processes. Mathematical Notes, Princeton University press. New Jersey, 1970.

[4] B. **PINCIÑBONO**, Spherically invariant and compound gaussian stochastic processes . IEEE transactions on information theory, vol I.T. 6, 1970 p 77-79.

[5] G. **RUCKEBUSH**, Sur le problème de la synthèse des filtres. Colloque CNRS, Aussois, 21-25 sept. 1981. Vol 2 p A1-1, A1-21 INRIA, BP 105 78153, le Chesnay, France.

[6[M. **WESTCOTT**, Identifiability in linear Processes. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw Geb 16, 39-46 (1970).