DIXIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 20 au 24 MAI 1985

DETECTION ET ESTIMATION SOUS CONTRAINTE

B. PICINBONO

L2S* - E.S.E. - Plateau du Moulon, 91190 - Gif Sur Yvette, FRANCE

RESUME

Dans la plupart des problèmes de détection et d'estimation on cherche à déterminer un système optimal selon un critère donné d'avance. En détection on peut soit minimiser le coût moyen en théorie bayésienne soit rendre maximum le rapport signal sur bruit. En estimation les critères les plus courants sont l'erreur en moyenne quadratiique ou les moindres carrés. Tous ces problèmes sont parfaitement résolus en absence de contrainte. Mais il arrive parfois qu'il faille les résoudre en présence de contrainte. On peut par exemple imposer la contrainte de causalité et il est bien connu qu'elle change par exemple complètement la forme du filtrage de Wiener. Cette contrainte de causalité n'est qu'un cas particulier de contrainte linéaire et nous nous proposons d'en faire une étude plus générale et plus systématique.

Après avoir défini le concept de contrainte linéaire sur un système de détection ou d'estimation, nous montrons comment le problème avec contrainte peut être résolu. Dans cette démarche on constate que le résultat peut être atteint par deux méthodes : une méthode directe générale mais souvent difficile à mettre en oeuvre au point de vue du calcul, et une méthode indirecte parfois beaucoup plus simple. Dans cette dernière on part de la solution sans contrainte, en général facile à obtenir, et on calcule sa modification liée à la contrainte. Divers exemples d'application de cette méthode sont présentées.

SUMMARY

In many detection or estimation problems it is necessary to find a system which is optimal in terms of a given criterion. In detection it is possible to search the minimum of the average cost of the Bayesian procedure or the maximum of the signal to noise ratio. In estimation the most common criterions are the least square or the quadratic mean error. All these problems are perfectly solved without constraint. But it is sometimes necessary to find a solution in presence of a constraint. It is for example possible to introduce the causality constraint and it is well known that it changes completely the form of the Wiener filtering. This causality constraint is only a particular case of linear constraint and the aim of this presentation is to give a more general and more systematic approach of these problems.

After giving the definition of linear constraint on a detection or estimation system, it is shown how the problem with constraint can be solved. It appears that the result can be obtained by two ways : a direct and general method, but sometimes difficult to implement on a calculation point of view, and an indirect one sometimes much simpler. The idea of this method is to calculate only the modification given by the constraint on the unconstrained problem. Some example are presented and discussed.

1. INTRODUCTION

De nombreux problèmes de détection ou d'estimation conduisent à la recherche d'un système, ou d'un filtre au sens large, optimal selon un critère déterminé. En estimation il s'agit par exemple très souvent de minimiser une erreur quadratique, tandis qu'en détection on cherche à rendre maximum un critère de performances. Pour bien préciser les idées et les notations donnons immédiatement quelques exemples. Le problème de base du filtrage optimal au sens de Wiener consiste à trouver la réponse percussionnelle h(k) d'un filtre tel que

$$\hat{y}(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)\, x(n-k) \qquad (1\text{-}1)$$

soit la meilleure estimation en moyenne quadratique d'un sigtnal y(n). Le filtre optimal minimise donc l'erreur $E\{[y(k)-\hat{y}(k)]^2\}$ et lorsque les propriétés statistiques du couple de fonctions aléatoires x(n) et y(n) sont connues, le problème se résoud immédiatement par projection, ce qui conduit dans ce cas à une équation de convolution.

La théorie du filtre adapté conduit à rechercher le vecteur $\underline{h}$ rendant maximum le rapport signal sur bruit

$$\rho[h] = \frac{(\underline{s}^T \underline{h})^2}{\underline{h}^T \Gamma \underline{h}}, \qquad (1\text{-}2)$$

où $\underline{s}$ est le vecteur signal et Γ la matrice de corrélation du bruit.

Dans le cas de la détection d'un signal aléatoire dans un bruit gaussien par un système quadratique le rapport signal sur bruit s'écrit

$$\rho[M] = \frac{Tr^2[M\, \Gamma_s]}{Tr[(M\, \Gamma_B)^2]}, \qquad (1\text{-}3)$$

où M est la matrice carrée définissant le filtre quadratique, les matrices Γ_s et Γ_B étant les matrices de corrélation du signal et du bruit. Le système quadratique optimal est défini par une matrice M rendant maximum (1-3).

Pour diverses raisons on peut être conduit à résoudre les mêmes problèmes en présence de contraintes linéaires, terme qui sera explicité clairement plus tard. Le cas le plus classique apparaît lorsque l'on impose la contrainte de causalité au filtrage de Wiener, ce qui revient à imposer h(k) = 0 pour k < 0 dans (1-1).

L'introduction d'une telle contrainte ne change pas la nature du problème, et l'on peut donc souvent le traiter directement sans utiliser une solution sans contrainte calculée au préalable. C'est ce qui se passe pour le filtrage de Wiener causal, et il est bien connu que la solution fondée sur les méthodes de factorisation spectrale n'utilise pas celle obtenue par convolution en absence de causalité.

Mais ceci n'est pas toujours le cas, et le but de cet exposé consiste à relier les solutions avec et sans contrainte. D'une manière plus précise nous montrerons dans de nombreux cas que si le problème sans contrainte est résolu, ce qui arrive très fréquemment, il est préférable, en particulier pour des raisons de simplicité, de partir de la solution sans contrainte pour obtenir celle en présence de contrainte.

Pour simplifier la présentation nous allons commencer par donner les principes généraux avant d'étudier quelques exemples.

2. ESTIMATION AVEC CONTRAINTE

2.1. Estimation linéaire en moyenne quadratique

Supposons pour simplifier que la réponse percussionnelle h(k) apparaissant dans (1-1) ait un support fini, de sorte que l'on puisse écrire

$$\hat{y} = \underline{h}^T \underline{x} \qquad (2\text{-}1)$$

où $\underline{x}$ et $\underline{h}$ sont des vecteurs à n dimensions, $\underline{x}$ étant de plus aléatoire et centré. La statistique du problème est déterminée par la matrice de corrélation de $\underline{x}$ et l'intercorrélation entre $\underline{x}$ et y, soit

$$\Gamma \triangleq E(\underline{x}\, \underline{x}^T); \quad \underline{c} \triangleq E(y\, \underline{x}). \qquad (2\text{-}2)$$

Imposer une contrainte linéaire à p dimensions signifie qu'on impose au vecteur $\underline{h}$ d'appartenir à un sous-espace R de R^n à n-p dimensions. En conséquence le problème d'estimation revient à trouver le vecteur $\underline{h}$ de R tel que $E[(y-\hat{y})]^2$ soit minimum.

On peut immédiatement noter que la contrainte imposée sur $\underline{h}$ modifie l'espace d'observation et que le problème peut toujours se résoudre par simple projection. En effet l'espace de Hilbert des observations en présence de contrainte est l'espace des variables aléatoires du second ordre défini par

$$H \triangleq \{\underline{u}^T \underline{x} \mid \underline{u} \in R\}. \qquad (2\text{-}3)$$

En conséquence le vecteur $\underline{h}$ définissant par (2-1) le filtrage optimal est déterminé par l'équation de projection

$$y - \underline{h}^T \underline{x} \quad \perp \quad H \qquad (2\text{-}4)$$

l'orthogonalité signifiant la non corrélation, ce qui donne

$$\underline{u}^T(\Gamma\, \underline{h} - \underline{c}) = 0, \ \forall\, \underline{u} \in R. \qquad (2\text{-}5)$$

Pour résoudre le problème analytiquement il suffit de prendre un ensemble de n-p vecteurs $\underline{u}_i$ de R linéairement indépendants, ce qui donne

$$\underline{u}_i^T \, \Gamma \, \underline{h} = \underline{u}_i^T \, \underline{c}, \quad 1 \leq i \leq n-p \tag{2-6}$$

et conduit donc à la résolution d'un système de n-p équations linéaires.

Cette solution tout à fait générale ignore totalement le problème sans contrainte. Elle conduit donc lorsque n est grand et p petit à un système à grande dimension. Or dans beaucoup de cas la solution du problème sans contrainte est connue, et son usage peut alors conduire à une grande simplification du problème.

Soit donc $\underline{h}_o$ la solution du problème sans contrainte déduite de (2-5) lorsque $R=R^n$ et définie par

$$\underline{h}_o \triangleq K \, \underline{c} \; ; \; K \triangleq \Gamma^{-1}. \tag{2-7}$$

A tout vecteur $\underline{h}$ associons le vecteur $\bar{\underline{h}}$ défini par

$$\bar{\underline{h}} \triangleq \underline{c} - \Gamma \, \underline{h} \tag{2-8}$$

ce qui entraine

$$\underline{h} = \underline{h}_o - K \, \bar{\underline{h}} \, . \tag{2-9}$$

Par hypothèse le vecteur $\underline{h}$ appartient à R tandis que d'après (2-5) $\bar{\underline{h}}$ appartient au sous-espace complémentaire $\bar{R}$ à p dimensions. De plus $\underline{h}$ se déduit de $\bar{\underline{h}}$ d'après (2-9). Pour calculer $\bar{\underline{h}}$ il suffit d'exprimer que $\underline{h}$ est orthogonal à $\bar{R}$, et en prenant un ensemble de p vecteurs de cet espace linéairement indépendants $\underline{v}_j$ on obtient

$$\underline{v}_j^T \, K \, \bar{\underline{h}} = \underline{v}_j^T \, \underline{h}_o, \quad 1 \leq j \leq p, \tag{2-10}$$

qui est l'équation complémentaire de (2-6), mais conduit à un système plus simple si p << n.

Nous appellerons <u>solution directe</u> celle déterminée par (2-6), et <u>solution indirecte</u> celle qui consiste à résoudre d'abord (2-10), puis à utiliser (2-9) pour obtenir $\underline{h}$.

Les performances de l'estimateur optimal sont déterminées par l'<u>erreur en moyenne quadratique</u>

$$\varepsilon^2 \triangleq E[(y-\hat{y})^2] = E(y^2) - E(\hat{y}^2). \tag{2-11}$$

Utilisant (2-1) et (2-9) on obtient

$$E(\hat{y}^2) = \underline{h}_o^T \, \Gamma \, \underline{h}_o - 2 \, \underline{h}_o^T \, \bar{\underline{h}} + \bar{\underline{h}}^T \, K \, \bar{\underline{h}}. \tag{2-12}$$

En notant que par construction $\underline{h}^T \, \bar{\underline{h}} = 0$, on déduit de (2-9) que

$$E(\hat{y}^2) = \underline{h}_o^T \, \Gamma \, \underline{h}_o - \bar{\underline{h}}^T \, K \, \bar{\underline{h}} \tag{2-13}$$

d'où

$$\varepsilon^2 = \varepsilon_o^2 + \varepsilon_c^2 \tag{2-14}$$

$$\varepsilon_o^2 \triangleq E(y^2) - \underline{h}_o^T \, \Gamma \, \underline{h}_o \tag{2-15}$$

$$\varepsilon_c^2 \triangleq \bar{\underline{h}}^T \, K \, \bar{\underline{h}} \, . \tag{2-16}$$

La quantité ε_o^2 est l'erreur minimum que l'on peut atteindre en l'absence de contrainte et ε_c^2 donne l'augmentation de cette erreur due à l'introduction de la contrainte.

En conclusion l'esprit de la méthode indirecte consiste à partir du problème général sans contrainte et à évaluer les modifications du filtre et de l'erreur minimum due à la contrainte.

Dans la suite nous supposerons souvent que n est infini, ce qui correspond à la plupart des problèmes de traitement du signal. Ceci ne modifie pas le principe de la méthode. Nous parlerons de contraintes finie ou infinie selon que p est aussi fini ou infini.

La méthode présentée ici n'a apparemment jamais été utilisée systématiquement en traitement du signal. Une approche du problème de Wiener causal dans un esprit similaire se trouve dans [1] p.346. On peut par ailleurs noter que des problèmes d'estimation avec contrainte ont été considérés dans une autre perspective en statistique [2] ou en géophysique [3].

<u>2.2. Estimation de puissance</u>

L'estimation de la puissance d'un bruit apparaît fréquemment dans les problèmes de détection adaptative avec commande automatique de gain [4] [5].

Considérons un vecteur aléatoire $\underline{x}$ de loi $N(\underline{0}, P\,\tilde{\Gamma})$, où $\tilde{\Gamma}$ est une matrice de covariance normalisée connue. Pour estimer P on peut utiliser un filtre quadratique du type $\underline{x}^T \, M \, \underline{x}$, où M est une matrice n x n symétrique. Le biais et la variance de cet estimateur sont donnés par (voir [4])

$$B(M) = P\{Tr[\tilde{\Gamma} \, M] - 1\} \tag{2-17}$$

$$V(M) = 2P^2 \, Tr[(\tilde{\Gamma} \, M)^2] \triangleq 2P^2 \, v(M). \tag{2-18}$$

Le problème sans contrainte consiste à trouver la matrice M_o donnant un biais nul et une variance minimum. Pour le résoudre considérons l'espace W^n des matrices carrées symétriques d'ordre n et associons à tout couple A et B de matrices de cet espace la quantité

$$\langle A,B \rangle \triangleq Tr[A \, \tilde{\Gamma} \, B \, \tilde{\Gamma}]. \tag{2-19}$$

On voit aisément que cette quantité définit un produit scalaire de matrices et en particulier <A,A> est positive car d'après (2-18) cette quantité vaut v(A).

En conséquence le problème consiste à trouver dans W^n l'élément tel que <M,M> est minimum avec la condition <M,K> = 1, où comme dans (2-7), $K = \tilde{\Gamma}^{-1}$. La solution est une conséquence directe de l'inégalité de Schwarz

$$\langle M,M\rangle \geq \langle M,K\rangle^2 \langle K,K\rangle^{-1} \tag{2-20}$$

d'où l'on déduit

$$M_o = \langle K,K\rangle^{-1} K = \frac{1}{n} K = \frac{1}{n} \tilde{\Gamma}^{-1} \tag{2-21}$$

$$\frac{1}{v_o} = \langle K,K\rangle = n . \tag{2-22}$$

Introduisons maintenant une contrainte linéaire imposant que M appartienne à un sous-espace W de W^n. En appliquant le théorème de projection on peut écrire

$$K = K_W + K_{\mathcal{W}} \tag{2-23}$$

et d'après la contrainte $\langle M,K\rangle = \langle M,K_W\rangle$. On obtient donc la solution directe du problème avec contrainte en remplaçant dans (2-21) et (2-22), K par K_W, soit

$$M_{oW} = \langle K_W,K_W\rangle^{-1} K_W \tag{2-24}$$

$$\frac{1}{v_{oW}} = \langle K_W, K_W\rangle. \tag{2-25}$$

Mais il est parfois plus simple d'utiliser la solution indirecte en calculant d'abord $K_{\mathcal{W}}$ et en écrivant

$$M_{oW} = [||K_{\mathcal{W}}||^2 - ||K_{\mathcal{W}}||^2]^{-1} \quad [K-K_{\mathcal{W}}] \tag{2-26}$$

$$\frac{1}{v_{oW}} = \frac{1}{v_o} - ||K_{\mathcal{W}}||^2 = n - ||K_{\mathcal{W}}||^2, \tag{2-27}$$

cette dernière formule étant similaire à (2-14). Ceci est particulièrement le cas lorsque $\mathcal{W}$ est de dimension faible. Ainsi dans les problèmes d'estimation des puissances avec référence bruit seul on est conduit à imposer une contrainte de type $Tr[M\, \underline{s}\, \underline{s}^T] = 0$, ce qui donne

$$\langle M,K\, \underline{s}\, \underline{s}^T K\rangle = 0 \tag{2-28}$$

En conséquence

$$K_{\mathcal{W}} = \alpha K\, \underline{s}\, \underline{s}^T K \tag{2-29}$$

où α est déterminé par la propriété $\langle K,K_{\mathcal{W}}\rangle = \langle K_{\mathcal{W}},K_{\mathcal{W}}\rangle$ soit

$$\alpha = \frac{\langle K,K\, \underline{s}\, \underline{s}^T K\rangle}{||K\, \underline{s}\, \underline{s}^T K||^2} = \frac{1}{\underline{s}^T K\, \underline{s}} \tag{2-30}$$

ce qui donne

$$||K_{\mathcal{W}}||^2 = 1 . \tag{2-31}$$

On obtient donc finalement

$$M_{oW} = \frac{1}{n-1} [K-(\underline{s}^T K\, \underline{s})^{-1} K\, \underline{s}\, \underline{s}^T K] \tag{2-32}$$

$$\frac{1}{v_{oW}} = n-1, \tag{2-33}$$

résultats obtenus par une méthode variationnelle dans [5].

3. DETECTION AVEC CONTRAINTES

Les deux rapports signal sur bruit (1-2) et (1-3) correspondant à la détection d'un signal déterministe ou aléatoire peuvent être écrits sous une forme similaire

$$\rho(a) = \frac{(a,b)^2}{(a,a)} , \tag{3-1}$$

où a est le vecteur inconnu caractérisant le système à déterminer, b le vecteur correspondant aux données du problème et (a,b) un produit scalaire approprié.

De l'inégalité de Schwarz on déduit que le maximum du critère ρ vaut

$$\rho_o = (b,b) \tag{3-2}$$

atteint pour le système tel que $a_o = \alpha b$, où α est une constante quelconque.

Dans le cas (1-2) les vecteurs sont des éléments de R^n avec le produit scalaire $\underline{a}^T \Gamma\, \underline{b}$ et le filtre adapté sans contrainte est caractérisé par

$$\underline{h}_o = \Gamma^{-1} \underline{s} \; ; \quad \rho_o = \underline{s}^T \Gamma^{-1} \underline{s}. \tag{3-3}$$

Dans le cas (1-3) les vecteurs sont des éléments de W^n, c'est à dire des matrices n x n symétriques et les caractéristiques du système optimal sont donc

$$M_o = \Gamma_B^{-1} \Gamma_S \Gamma_B^{-1} \; ; \quad \rho_o = Tr[(\Gamma_S \Gamma_B^{-1})^2]. \tag{3-4}$$

Ce filtre est la forme matricielle du filtre de Eckart calculé initialement sous forme de gain [6] et également donné sous cette forme dans [7].

Le problème avec contrainte linéaire apparait quand on impose au vecteur a d'appartenir à un certain sous-espace E de son espace de définition E^n.

Utilisant alors la décomposition analogue à (2-23)

$$b = b_E + b_{\mathcal{E}} \tag{3-5}$$

faisant apparaître les projections de b sur deux sous espaces orthogonaux, on voit que la solution directe du problème avec contrainte conduit à

$$a_{oE} = b_E \; ; \qquad \rho_{oE} = (b_E, b_E). \tag{3-6}$$

Mais il peut être plus utile d'utiliser la solution indirecte faisant intervenir $b_{\mathcal{E}}$, soit

$$a_{oE} = b - b_{\mathcal{E}} = a_o - b_{\mathcal{E}} \tag{3-7}$$

avec

$$\rho_{oE} = \rho_o - (b_{\mathcal{E}},b_{\mathcal{E}}), \tag{3-8}$$

qui donne la dimunition du rapport signal sur bruit lié à la contrainte. Le vecteur $b_{\mathbb{E}}$ s'obtient en écrivant que

$$(u,b) = (u,b_{\mathbb{E}}),\ \forall\ u \in \mathbb{E} \tag{3-9}$$

qui correspond à (2-10) et peut être très simple à calculer si la dimension de la contrainte est faible.

4. EXTENSIONS

Les calculs précédents peuvent être étendus sans peine au cas infini, c'est à dire en particulier lorsque (2-1) s'écrit sous la forme de filtrage de Wiener de type (1-1).

L'exposé détaillé de ce calcul dépasse le cadre d'une conférence limitée et doit être publié plus largement [8].

Indiquons ici simplement les quelques problèmes qui peuvent ainsi être aisément résolus.

Il arrive que la seule contrainte imposée au filtre de Wiener (1-1) soit h(o) = 0, ce qui est en particulier le cas du filtre interpolateur qui calcule

$$\hat{x}(n) = \sum_{k \neq 0} h(k)\ x(n-k). \tag{4-1}$$

L'équation de Wiener-Hopf associée à ce problème est

$$\sum_{\ell \neq 0} h(\ell)\ \Gamma_x(k-\ell) = \Gamma_x(k),\ k \neq 0, \tag{4-2}$$

et cette équation est relativement complexe à résoudre directement. En utilisant la méthode indirecte on voit que le sous-espace complémentaire $\not{R}$ est à une dimension, alors que R est évidemment infini. Il s'impose donc d'utiliser cette méthode indirecte donnant $\bar{h}(k)$ avec une seule équation.

La structure et les propriétés de cet interpolateur sont étudiées dans [8].

Un autre problème qui peut aisément être étudié par ces méthodes concerne le prédicteur à P pas. Ce prédicteur joue un rôle important dans certaines questions d'automatique [9] et a été étudié sous des hypothèses assez restrictives par Astrom [10] p.165. En fait ce problème se traite en toute généralité par la méthode de contrainte selon une procédure qui a été publiée par ailleurs [11].

En conclusion on peut remarquer que bien d'autres cas de contraintes pourraient être analysées et qui sortent du cadre de ce travail limité aux contraintes linéaires. Par exemple une contrainte d'amplitude telle que $|h(k)| < M$ est de type non linéaire et nécessite une méthode particulière.

REMERCIEMENTS : Ce travail a été en partie soutenu par la Direction Technique des Constructions Navales sous le contrat N° 844 882 606 100 en liaison avec le GERDSM (Groupe d'Etude et de Détection Sous-marine) du Brusc.

REFERENCES

[1] A. PAPOULIS, Signal Analysis, Mc. Graw Hill, New-York, 1977.

[2] W.D. STIRLING, "Least squares subject to linear constraints", Journal of the Royal Society, Applied Statistics, C, Vol. 30, N° 2, pp.204-212, 1981.

[3] A.G. JOURNEL, "Kriging in terms of projections", Mathematical Geology, 9, pp.563-586, 1977.

[4] B. PICINBONO, J.P. DUGRE et E. TACCONI, "Estimation de la puissance d'un bruit et commande automatique de gain", Ann. Telecomm., 34, pp.543-557, 1979.

[5] H. EL AYADI et B. PICINBONO, "NAR AGC adaptive detection of non overlapping signals", IEEE Trans. ASSP, 29, pp.952-963, 1981.

[6] C. ECKART, "Optimal rectifier systems for the detection of steady signals", Tech. Rep. S. 10, ref.52-11, Scripps Inst. of Oceanography, University of California, 1952.

[7] C. BAKER, "Optimum quadratic detection of a random vector in Gaussian noise", IEEE Trans. Comm., COM 14, pp.802-805, 1966.

[8] B. PICINBONO et M. BOUVET, "Constrained Wiener filtering", en cours de publication, rapport interne du L2S.

[9] G. FAVIER, "Etude comparative des prédicteurs auto-ajustables", Colloque GRETSI 1983, Nice pp.525-533.

[10] K.J. ASTROM, Introduction to stochastic control theory, Academic Press, New-York, 1970.

[11] B. PICINBONO et M. BOUVET, "Constrained prediction", ICASSP 1985, Conf. 35-1.

*L2S : Laboratoire des signaux et Systèmes, Centre de recherche du CNRS et de l'Ecole Supérieure d'Electricité, associé à l'Université de Paris-Sud.