

ONZIEME COLLOQUE GRETSI - NICE DU 1^{er} AU 5 JUIN 1987



APPLICATION DE LA METHODE DES CORRELATIONS D'ORDRE SUPERIEUR A LA DETECTION ET LA RECONSTITUTION D'UNE SINUSOIDE NOYEE DANS UN BRUIT IMPORTANT

YACOUBI-S. E.M. - MENEZ J. - ALENGRIN G. - MATHIEU P.

Laboratoire Signaux et Systèmes (LASSY) - UA 814 du CNRS
Université de Nice - 06041 NICE-Cedex
GRECO 69 " SARTA " du CNRS

RESUME :

Dans cette communication nous présentons une méthode d'extraction d'une sinusoid noyée dans un bruit important. Cette méthode est fondée sur l'application des techniques d'analyse spectrale paramétrique, non pas au signal lui-même mais à son autocorrelation d'ordre supérieure. L'incrémentation de l'ordre de la corrélation permet d'améliorer le rapport S/B. Une fois les paramètres estimés par cette méthode il est possible de reconstituer le signal sinusoidal. La méthode d'estimation des paramètres précédente, peut-être étendue à plusieurs sinusoides fortement bruitées (bruit blanc additif, SNR = -10 dB) en corrigeant l'effet de la fenêtre d'apodisation pour chaque ordre de la corrélation.

1. INTRODUCTION :

La détermination des paramètres d'un processus autorégressif (AR) modélisant une somme de sinusoides noyées dans un bruit blanc, est un problème que l'on rencontre dans divers applications en traitement du signal.

La méthode proposée est basée sur une modélisation AR du type Burg, Pisarenko, ... [1] appliquée non pas au signal lui-même, mais à son autocorrelation d'ordre supérieur, que l'on corrige à chaque itération sur l'ordre afin de tenir compte de l'effet de la fenêtre d'apodisation. Un test sur l'énergie résiduelle du prédicteur (Burg) ou sur la valeur propre minimale de la matrice de coefficients de corrélation d'ordre m corrigés (Pisarenko) est utilisé comme critère d'arrêt de l'itération sur l'ordre de la corrélation [2].

Une fois les paramètres du modèle estimés, il est possible dans le cas de l'extraction d'une sinusoid noyée dans du bruit (SNR < 0. dB), de reconstituer la partie déterministe du signal, par application d'un algorithme de Lainiotis permettant d'estimer les conditions initiales du processus sinusoidal [3].

2. POSITION DU PROBLEME :

On considère la séquence d'observation bruitee sous la forme suivante :

$$x(n) = s(n) + b(n) \quad (1)$$

$$\text{avec } s(n) = \sum_{i=1}^p A_i \cos(n\omega_i + \phi_i) \quad (2)$$

signal contenant p composantes sinusoidales d'amplitude A_i , de pulsation ω_i et de phase ϕ_i , vérifiant l'équation récurrente suivante :

$$s(n) + \sum_{k=1}^{2p} a(k) s(n-k) = 0 \quad (3)$$

$b(n)$ est un bruit blanc de variance b et de moyenne nulle et que l'on suppose non corrélé

SUMMARY :

In this paper, we introduce an extraction method of a sinusoid disturbed by an important white noise. This method is based on the application of parametric spectral analysis techniques, not to the signal itself, but to its autocorrelation of higher order. The incrementation of the order of the autocorrelation results in an improvement of the SNR. Once the filter parameters have been estimated, we are able to synthetize the sinusoidal signal. The previous method of the estimation of the parameters may be extended to several noisy sinusoids (SNR ≈ -10 dB) by correcting the windowing effect at each step of the algorithm.

avec le signal $s(n)$. Les coefficients $\{a(k)\}$ de l'équation (3) déterminent entièrement les pulsations ω_i via le polynôme caractéristique mais ne contiennent aucune information sur les amplitudes A_i et les phases ϕ_i du modèle (2). Ces dernières sont déterminées par les conditions initiales de l'équation récurrente.

On définit la séquence de corrélation du processus $x(n)$ par :

$$R_x(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)x(n+k) \quad (4)$$

expression dans laquelle l'opérateur \sum_k est défini par :

$$S\{\cdot\} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-n-1} \cdot \quad (5)$$

En remplaçant dans (4), $x(n)$ par les expressions (1) et (2) la séquence de corrélation s'écrit :

$$R_x(k) \approx \sum_{i=1}^p \frac{A_i}{2} \cos(k\omega_i) + b \delta_k + \alpha(k) \quad (6)$$

où $\alpha(k)$, terme en $1/N$, tend vers zéro lorsque N est suffisamment grand. On peut approximer la séquence de corrélation par :

$$R_x(k) \approx R_s(k) + b \delta_k \quad (7)$$

$R_s(k)$ = corrélation du processus sinusoidal $\{s(n)\}$. On remarque que pour :

$$k = 0, \text{ on a } R_x(0) = R_s(0) + b^2 = B \quad (8)$$

et pour $k \neq 0$, on a $R_x(k) = R_s(k)$

En combinant les équations (3), (6), (7) et (8) on obtient :



$$Rx(k) = - \sum_{i=1}^{2p} a(i) Rx(k-i) + \frac{B}{k} \delta \quad (9)$$

On remarque que $Rx(k)$ est la réponse impulsionnelle d'un modèle "tout-pôle" ayant pour coefficients $\{a(i)\}$. Or il est bien connu [4] que les pôles estimés d'un processus sinusoïdal en présence du bruit, se déplacent vers l'origine du cercle unité, en même temps que le rapport S/B décroît. Ceci est dû au fait que le bruit additif modifie la densité spectrale en introduisant des zéros ayant pour effet de lisser cette dernière et d'engendrer un biais sur l'estimation des fréquences.

3. AMELIORATION DU RAPPORT S/B :

Soit $Rx(1,k)$ la corrélation d'ordre 1 du signal bruité :

$$Rx(1,k) = \frac{N}{k} \{ x(n) \cdot x(n+k) \}$$

On définit la corrélation d'ordre m pour $m > 1$ par :

$$Rx(m,k) = \frac{N}{k} \{ Rx(m-1,k) \cdot Rx(m-1,n+k) \} \quad (10)$$

D'après l'équation (6) la corrélation d'ordre 1 s'écrit :

$$Rx(1,k) = Rs(1,k) + \frac{b}{k} \delta$$

En tenant compte de la blancheur du bruit et du fait que $a(k) \rightarrow 0$ (expression (5)), moyennant quelques calculs la corrélation d'ordre 2 peut s'écrire :

$$Rx(2,k) \approx Rs(2,k) + \left| \frac{b}{\sqrt{N}} \right|^2 \delta \quad (11)$$

retrouvant ainsi une expression identique à (6), mais dans laquelle la variance du bruit est divisée par \sqrt{N} . Il en est ainsi pour chaque itération sur l'ordre de la corrélation [2].

Si on considère à présent un signal ne comportant qu'une seule composante sinusoïdale noyée dans un bruit blanc :

$$x(n) = A \cos(n\omega + \theta) + b(n) \quad (12)$$

sa corrélation d'ordre 1 s'écrit :

$$Rx(1,k) = A^2 / 2 \cos(k\omega) + \frac{b}{k} \delta$$

le rapport signal/bruit est défini par :

$$SB1 = A^2 / 2b$$

et la corrélation normalisée devient :

$$\begin{aligned} rx(1,k) &= \frac{SB1}{1 + SB1} \cos(k\omega) + \frac{1}{1 + SB1} \delta \\ &= \frac{\alpha}{1} \cos(k\omega) + \frac{\beta}{1} \delta \quad (13) \end{aligned}$$

Si le rapport $SB1$ est grand ($>> 1$), α tend vers 1 et β tend vers 0 d'où :

$$rx(1,k) = \cos(k\omega)$$

Par contre si le rapport $SB1$ est petit ($<< 1$) α tend vers 0 et β vers 1 et on obtient :

$$rx(1,k) = \frac{\delta}{k}$$

La corrélation d'ordre 2 s'écrit d'après (11) et (5) :

$$Rx(2,k) = \frac{\alpha^2}{2} \cos^2(k\omega) + \frac{\beta^2}{N} \delta \quad (14)$$

le nouveau rapport S/B sera défini par :

$$SB2 = \frac{N}{2} \left(\frac{\alpha^2}{1} / \frac{\beta^2}{N} \right) = \frac{N}{2} SB1$$

pour tenir compte du passage des moments d'ordre 2 aux moments d'ordre 4. L'amélioration du rapport S/B est proportionnelle à $\sqrt{N/2}$:

$$SB2 = \sqrt{N/2} SB1$$

et la corrélation normalisée d'ordre 2 s'écrit :

$$rx(2,k) = \frac{\alpha^2}{2} \cos^2(k\omega) + \frac{\beta^2}{2} \delta \quad (15)$$

avec : $\alpha > \alpha_2$, $\beta < \beta_2$ et $SB2 > SB1$.

4. CORRECTION DE L'EFFET DE LA FENETRE :

La fonction de corrélation (4) est calculée sur une séquence finie de points donnant une estimation $\hat{Rx}(k)$ de $Rx(k)$:

$$\hat{Rx}(k) = \frac{N}{k} \{ x(n)w(n).x(n+k)w(n+k) \} \quad (16)$$

$\{w(n)\}$ = fenêtre d'apodisation ayant pour corrélation $Rw(k)$. Sous certaines conditions [5], l'estimation $\hat{Rx}(k)$ s'écrit :

$$\hat{Rx}(k) \approx Rx(k) \cdot Rw(k) + \epsilon(k) \quad (17)$$

D'après l'étude asymptotique [5] des différents termes de l'expression (17), les valeurs de $\hat{Rx}(k)$ sont distribuées autour d'une valeur moyenne donnée par le premier terme de (17) d'où en première approximation $\hat{Rx}(k)$ peut s'écrire :

$$\hat{Rx}(k) \approx Rx(k) \cdot Rw(k) \quad (18)$$

En prenant certaines précautions ($Rw(k) \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow N$) l'expression de la corrélation peut-être corrigée par :

$$\begin{aligned} Rx(k) &= \hat{Rx}(k) / Rw(k) \\ \text{pour } k &= 0, \dots, M \text{ avec } M < N \end{aligned}$$

5. ESTIMATION DES PARAMETRES :

D'après l'expression (9), la séquence de corrélation étant la réponse impulsionnelle d'un filtre tout-pôle, l'estimation des paramètres du prédicteur est obtenue par deux méthodes classiques d'analyse spectrale :

* en choisissant comme entrée du filtre en treillis (algorithme de Burg) la corrélation normalisée d'ordre m : $rx(m,k)$, le filtre sera initialisé par :

$$fo(k) = bo(k) = rx(m,k), k = 0, \dots, N-1$$

($fo(k)$ et $bo(k)$ étant les erreurs de prédiction avancée et rétrograde d'ordre 0).

** en recherchant le vecteur propre associé à la plus petite valeur propre de la matrice de corrélation formée à partir des valeurs corrigées de la corrélation d'ordre m :

$$R(i,j) = rx(m, |i-j|), i, j = 0, \dots, 2p$$



La corrélation d'ordre supérieur permettant d'améliorer le rapport S/B, on remarque que le rapport de l'énergie résiduelle sur l'énergie totale du filtre (Burg), ainsi de la valeur propre minimale (Pisarenko) tendent vers zéro lorsque m augmente ($B \rightarrow 0$). Ceci peut alors constituer un critère d'arrêt de l'ordre m de la corrélation.

6. RECONSTITUTION DU SIGNAL DETERMINISTE :

Dans le cas d'une seule composante sinusoïdale, l'expression (3) devient :

$$s(n) = -a(1)s(n-1) - a(2)s(n-2) \quad (19)$$

L'équation récurrente donnant $s(n)$ en fonction des deux valeurs précédentes.

Si on considère un ensemble de paramètres $\{z(n)\}$ constituant une mémoire sélective condensée du processus (19), appelée l'état du système, on peut représenter le processus (1) par le modèle d'état suivant :

$$\begin{aligned} z(n+1) &= \begin{pmatrix} 0 & -a(2) \\ 1 & -a(1) \end{pmatrix} z(n) \\ s(n) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} z(n) \\ x(n) &= s(n) + b(n) \end{aligned} \quad (20)$$

$z(n)$ = état du système.

Il s'agit de reconstituer le signal sinusoïdal $s(n)$ à partir de la séquence d'observation bruitée $x(n)$ connaissant les paramètres $\{a(k)\}$.

Pour cela nous pourrions simplement appliquer un algorithme de filtrage temporel (Kalman). Or le système (20) ne présentant pas de bruit dans l'équation dynamique, on peut améliorer une telle procédure en utilisant également un algorithme de lissage (Lainiotis) afin d'estimer l'état initial du système (20), ce qui permet d'obtenir une meilleure reconstitution du signal sinusoïdal [3,6].

7. RESULTATS EXPERIMENTAUX :

Dans cette application, on considère deux types de signaux : synthétique ou réel. Dans le premier cas, on génère une seule sinusoïde : fréq. $f=0.22$, ampl. $A=5$, phase $\theta=\pi/4$ rapport S/B = -15 dB, et une somme de deux sinusoïdes : $f_1=0.22$, $f_2=0.31$, $A_1=A_2=5$, $\theta_1=\pi/4$, $\theta_2=0$, rapport S/B = -6 et -9 dB. Dans le second cas, on étudie un signal réel utilisé pour l'étude des vibrations des chaussées, de rapport S/B compris entre -20 et -30 dB. Fig. 1 permet de mettre en évidence l'amélioration du rapport S/B en fonction de l'ordre de la corrélation : a) variation des deux premiers coeff. de corrélation $rx(1)$ et $rx(2)$ en fonction de l'ordre de la corrélation : $\alpha \rightarrow 1$ et $rx(k) \rightarrow rs(k)$; b) l'erreur normalisée (Burg) et la valeur propre minimale (Pisarenko) tendent vers zéro lorsque l'ordre augmente : $B \rightarrow 0$, permet de constituer un critère d'arrêt de l'ordre de la corrélation. Fig. 2 représente les séquences de corrélation dans le cas d'une seule sinusoïde de rapport S/B = -15 dB : a) corrélation d'ordre 1, b) corrélation d'ordre 5 sans correction de la fenêtre d'apodisation (rectangulaire), c) corrélation d'ordre 5 avec correction. Fig. 3 montre les densités spectrales de puissance obtenues à partir des coeff. estimés : a) prédicteur d'ordre 2 (Burg) permet de mettre en évidence l'amélioration de la résolution spectrale à chaque itération sur l'ordre (de 1 à 5) dans le cas d'une seule sinusoïde, b) vecteur propre d'ordre 4 (Pisarenko) associé à la valeur propre minimale de la matrice

de corrélation permet de voir la réduction du biais en fréquence introduit par le bruit additif dans le cas de deux sinusoïdes de rapport S/B = -6 dB, c) idem rapport S/B = -9 dB Fig. 4, reconstitution du signal dans le cas d'une seule sinusoïde : rapport S/B = -15 dB a) signal sinusoïdal : $s(n)$, b) signal d'observation bruité : $x(n)=s(n)+b(n)$, c) signal $s(n)$ reconstitué par un algorithme de Lainiotis combinant filtrage et lissage à partir de la séquence bruitée et des coeff. estimés. Fig. 5 cas d'un signal réel de rapport S/B entre -20 et -30 dB, a) signal bruité : $x(n)$ b) densité spectrale de puissance à chaque ordre de la corrélation, c) signal reconstitué.

8. CONCLUSION :

Avec cette méthode, les effets du bruit sur l'estimation des fréquences de sinusoïdes noyées dans un bruit important sont compensés pour des rapports S/B très faible : -9 dB dans le cas de deux sinusoïdes et jusqu'à -20 dB dans le cas d'une seule sinusoïde. La résolution spectrale est améliorée et le biais en fréquence réduit. Par contre cette méthode nécessite un grand nombre de calculs.

REFERENCES :

- [1] S.M. KAY - S.L. MARPLE : "Spectrum analysis : a modern perspective" Proc. of the IEEE, N°11, NOV 1981
- [2] E.M. YACOUBI - J. MENEZ - G. ALENGRIN - P. MATHIEU : "Extraction of some noisy sinusoïdes by successive correlation" Int. Conf. EUSIPCO 86, The HAGUE, SEP 1986
- [3] E.M. YACOUBI - M. ROSSO - G. ALENGRIN : "Algorithmes d'identification et de lissage sur architecture parallèle ..." Note interne LASSY Univ. de Nice JAN 1986
- [4] S.M. KAY : "The effects of noise on the autoregressive spectral estimator" IEEE Trans. on ASSP, Vol 27, OCT 1979
- [5] P. COSI - L. FRIGO - G.A. NIAN - T. SINIGALIA : "On the use of autocorrelation for pitch extraction ..." Speech Communication, N°3, 1984
- [6] G. ALENGRIN - E.M. YACOUBI - J. MENEZ - M. ROSSO : "Algorithmes d'extraction de sinusoïdes noyées dans du bruit" IASTED International Symposium, Paris, JUN 1985

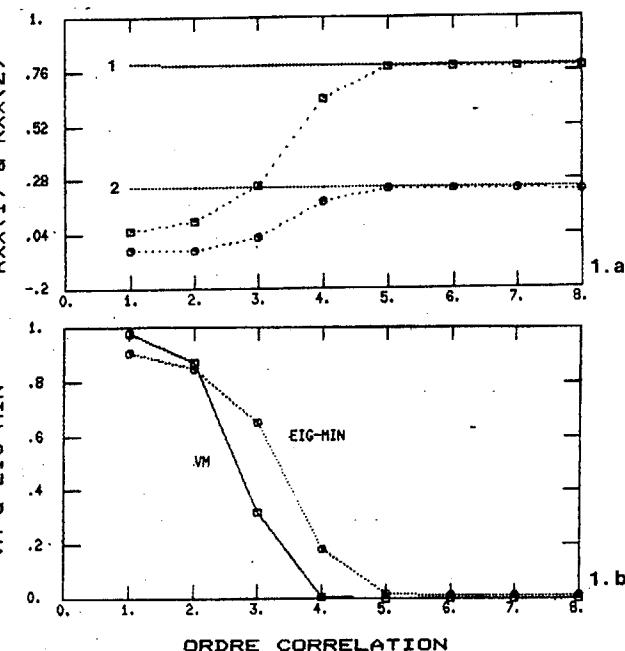


Fig. 1 : Amélioration du rapport S/B

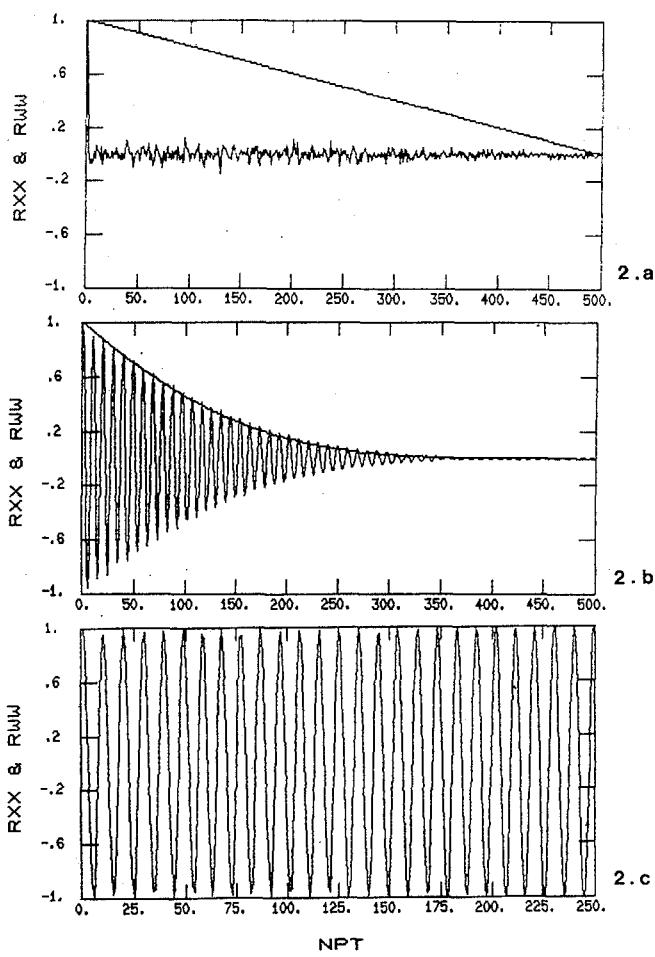


Fig. 2 : Fonction de corrélation du signal

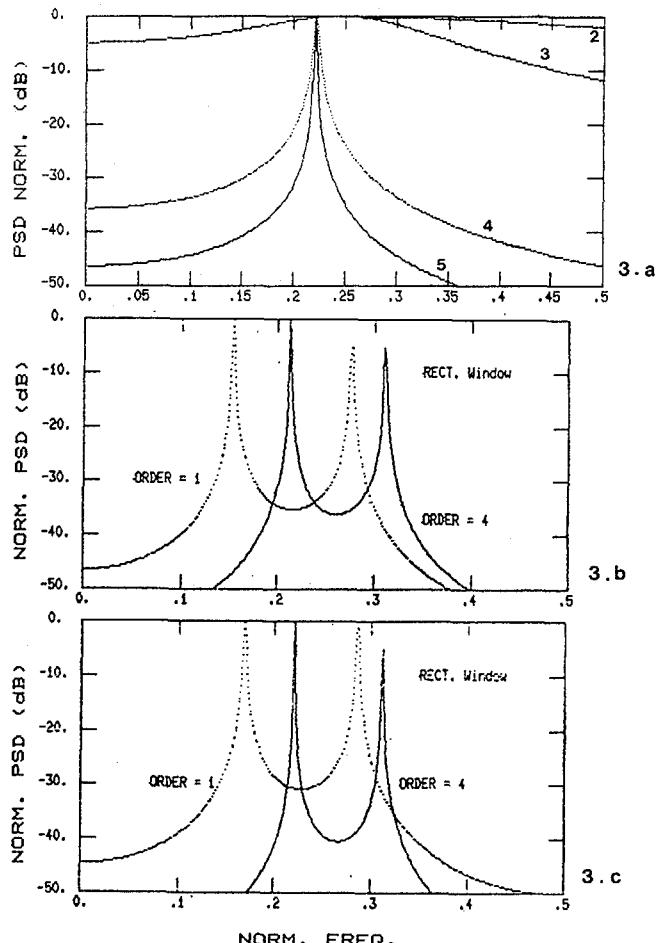


Fig. 3 : Densités spectrales de puissance

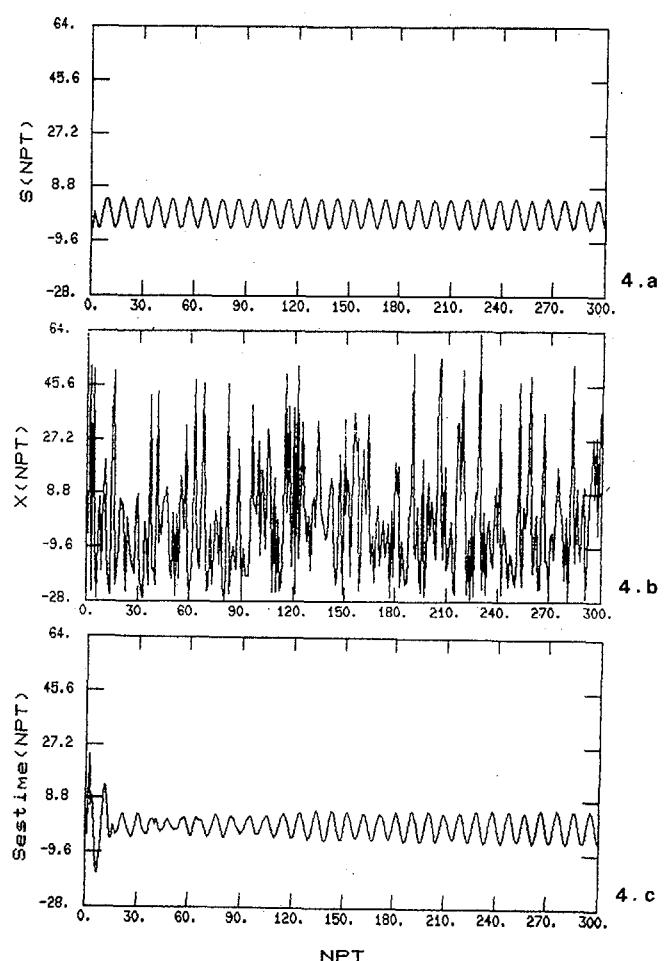


Fig. 4 : 1 sinusoïde SNR = -15. dB

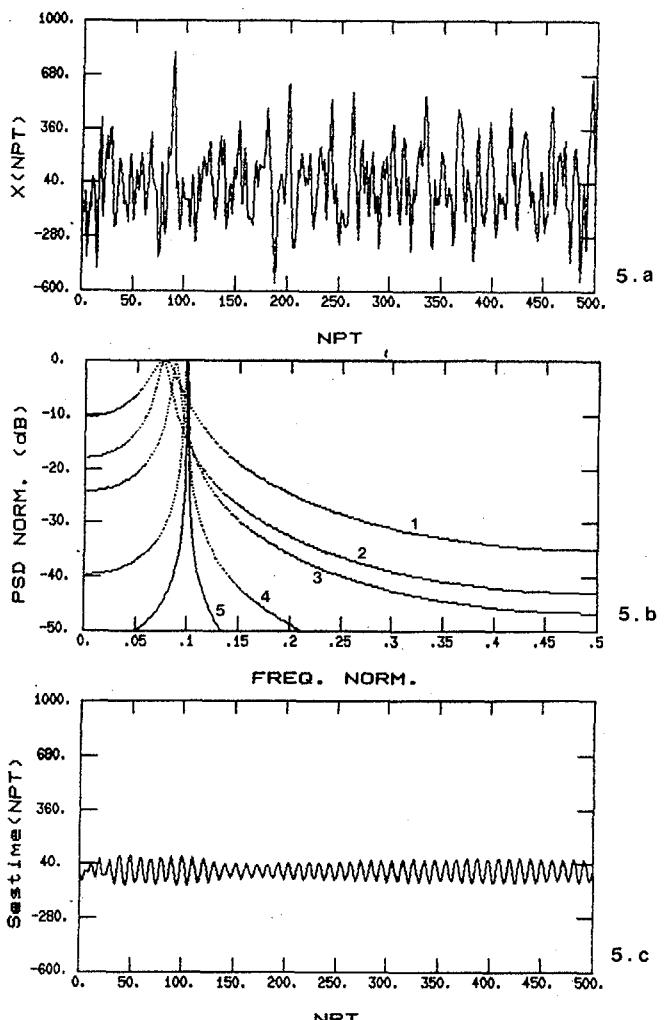


Fig. 5 : Signal réel SNR ≈ -20. dB