

**Analyse spectrale évolutive : comparaison de plusieurs algorithmes
sur l'ensemble des signaux-tests du GRECO-SARTA**

Rédaction et présentation : C. LATOMBE (2)

Travail de collaboration dans le cadre du GRECO-SARTA.

RESUME

Dans cet article, nous présentons les résultats obtenus dans un groupe de travail du GRECO-SARTA, groupe intitulé "Analyse spectrale évolutive". Le but de ce groupe de travail était de comparer les résultats des multiples algorithmes connus d'analyse spectrale sur des signaux non-stationnaires lentement variables au cours du temps.

Ce travail de comparaison a nécessité la classification préalable des diverses méthodes en soulignant les hypothèses implicites faites et les paramètres essentiels à l'analyse.

La comparaison a été effectuée en étudiant les résultats obtenus sur un même ensemble de signaux-tests, non stationnaires. Ce choix de signaux a été proposé et accepté par les participants à ce groupe qui y retrouvent des types de signaux proches de leurs applications habituelles.

SUMMARY

We present here some results of a working-group of the GRECO-SARTA. This group was concerned by Evolutive Spectral Analysis and intended to compare the numerous known algorithms in spectral analysis. This comparison is done on non-stationary signals that are slowly varying in time.

Previous to this comparison, a classification of the various methods is required, that outlines the implicit hypotheses and the parameters that are the core of the analysis.

The comparison is performed by studying results obtained on a common set of non-stationary test-signals. The proposed signals were chosen by the participants to the working-group because these signals are similar to the ones they have to study in their usual applications.

Ont participé:

- (1) du LASSY, E.R.A. 835 du C.N.R.S., 41 Bd Napoléon, 06041 NICE-Cedex
G. Alengrin, M. Barlaud, C. Charbonnier, P. Mathieu, J. Menez, E.M. Yacoubi, J. Zerubia,
- (2) du CEPHAG, LA 346 du C.N.R.S., bp 46, 38402 St-Martin-d'Hères
C.Latombe, N.Martin
- (3) de l' ICPI, 31 Place Bellecour, 69288 Lyon-cedex 02
P. Flandrin
- (4) du LSS , ESE , Plateau du Moulon, 91190 Gif-sur Yvette
G. Demoment, Y. Goussart, A. Houacine
- (5) du LAG, LA 228, ENSIEG, BP 46 , 38402 St-Martin d'Hères
N.K.M'Sirdi

Introduction

Chercher le spectre évolutif d'un signal non-stationnaire comporte différentes difficultés. Tout d'abord, la notion de signal non-stationnaire ne peut être définie avec précision. Le terme de rupture est souvent utilisé pour modéliser un changement brutal entre des situations stationnaires. Des signaux non-stationnaires lentement variables au cours du temps seront dits évolutifs; cette variation lente se caractérise par le fait que les signaux peuvent être considérés comme stationnaires sur des fenêtres d'analyse dont la durée n'est pas négligeable devant la durée totale du signal. Nous nous placerons essentiellement dans cette situation.

D'autre part, l'analyse spectrale évolutive a pour but de fournir une quantité qui soit une représentation acceptable de la répartition de l'énergie ou de la puissance au cours du temps. Ces représentations sont diverses, citons par exemple, la distribution de Wigner-Ville (DWV) et les densités spectrales à cours terme obtenues soit à partir de spectrogrammes calculés sur des fenêtres où le signal est "quasi-stationnaire", soit à partir de méthodes auto-régressives sur les mêmes fenêtres.

Cet article se propose de comparer diverses représentations conjointes. Ces représentations peuvent être obtenues par des méthodes paramétriques ou non, présupposent ou non un modèle pour les signaux à étudier. Les estimateurs comparés, pour la plupart, ne sont pas nouveaux. Les performances de certains de ces estimateurs sont connues pour des signaux stationnaires et leur aptitude à suivre une évolution lente au cours du temps dépend d'un ensemble divers de paramètres ; il s'ensuit que la comparaison théorique de ces estimateurs reste

délicate. Nous comparons ici les résultats obtenus sur un ensemble de signaux communs.

1 - Description des signaux tests

Les différents participants au groupe de travail ayant souvent à caractériser des systèmes résonnantes variant au cours du temps, les signaux synthétiques utilisés pour la comparaison sont du type sinusoïdes modulées, bruitées ou non.. Nous en donnons une brève description ci-dessous.

1.1. "Sinusoïdes" dans un bruit blanc

Le signal synthétique à temps discret comporte 128 points ($\Delta t = 1$ ms) et est représenté figure 1 (1). Les fréquences pures sont modélisées par :

$$A_i \cos [2\pi f_i t + \phi_i]$$

et le signal synthétique est :

$$x(n) = \sum_{i=1}^3 A_i \cos [2\pi f_i n \Delta t + \phi_i] + b(n \Delta t)$$

On choisit 3 fréquences : $f_1 = 200$ Hz, $f_2 = 250$ Hz, $f_3 = 350$ Hz avec respectivement pour paramètres :

$$A_1 = 5, \quad A_2 = 10, \quad A_3 = 5$$

$$\phi_1 = \frac{\pi}{4}, \quad \phi_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \phi_3 = 0$$



Le rapport signal à bruit est fixé à 10 db :

$$S/B = 10 \log \frac{\sum_n x^2(n)}{\sum_n b^2(n)} = 10 \text{ dB}$$

1.2. Signaux à modulation linéaire de fréquence et bruités

Le signal dure 128 ms ($\Delta t = 1 \text{ ms}$). Il comporte deux motifs à modulation linéaire de fréquence (et parallèles) représentés par la figure 1 (2).

L'écart de 10 Hz est inférieur à l'écart de Storey (40 Hz). La phase à l'origine du premier motif est $\pi / 4$, celle du deuxième motif est $\pi / 2$. Les deux amplitudes A sont égales à 5 et le rapport S / B est de 15 db.

1.3. Fréquence constante puis déferlante (cas bruité)

Le signal comporte 256 points ($\Delta t = 1 \text{ ms}$). Dans le plan temps-fréquence, il est représenté par la figure 1 (3).

L'amplitude A est constante et égale à 5. Les phases à l'origine sont choisies égale à $\pi / 4$ (la différence de phase pour $t = 128 \text{ ms}$ est proche de $\pi / 2$). Le rapport S / B est de 20 db.

1.4. Modulation parabolique de fréquence

Le signal comporte 128 points ($\Delta t = 1 \text{ ms}$). Dans le plan temps-fréquence, il est représenté par la figure 1 (4).

La modulation de fréquence est parabolique, entre 200 et 400 Hz. L'amplitude est constante.

1.5. Deux motifs se croisant (sans bruit)

Le signal comporte 256 points ($\Delta t = 1 \text{ ms}$). Il est représenté sur la figure 1 (5).

Les amplitudes sont prises égales et égales à 5. Les phases à l'origine sont nulles et la différence de phase pour $t = 128 \text{ ms}$ est proche de π .

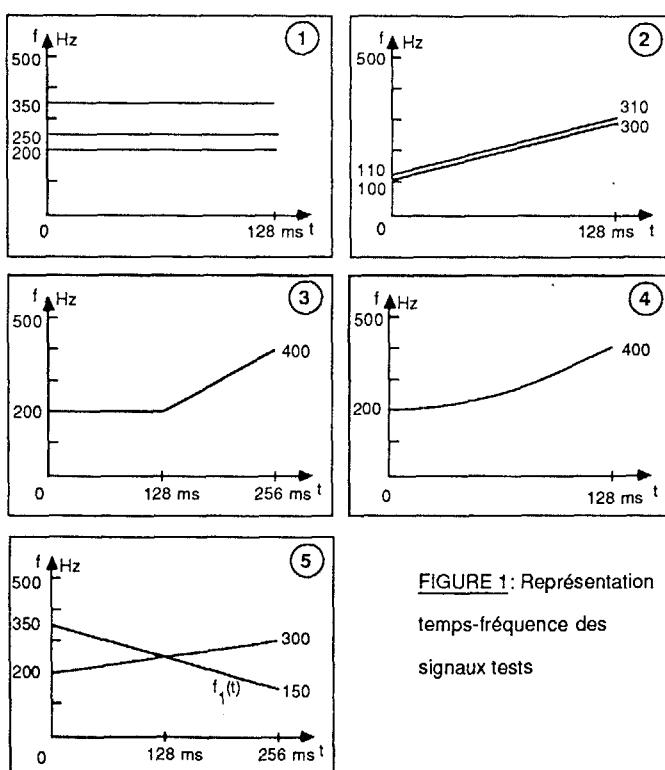


FIGURE 1: Représentation temps-fréquence des signaux tests

2 - Méthode non-paramétrique : spectre évolutif de Wigner-Ville

La représentation de Wigner-Ville est une représentation conjointe (temps-fréquence) qui n'introduit pas de paramétrisation et ne considère pas le signal non stationnaire comme une concaténation de tranches stationnaires. Cette distribution sera définie tout d'abord pour un signal certain, puis pour un signal aléatoire et enfin appliquée aux signaux tests.

2.1. Distribution de Wigner-Ville (DWV) pour un signal certain

Par définition, la DWV d'un signal réel x est donnée par [1] [2] :

$$W_x(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} z_x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) z_x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{i2\pi f t} dt \quad (1)$$

où $z_x(t)$ est le signal analytique (s.a.) associé à $x(t)$.

Quoique la DWV puisse être construite sur le signal réel, elle est construite sur le s.a. associé pour au moins trois raisons :

- seul le s.a. permet de définir les notions fondamentales d'enveloppe et de fréquence instantanée ;
- la DWV est obtenue par une transformation bilinéaire, ce qui crée des termes d'interaction entre composantes du plan temps-fréquence : travailler sur le s.a. permet de supprimer les fréquences négatives et donc les termes d'interaction entre fréquences positives et négatives ;
- le passage de (1) au cas discret ne pose alors aucun problème de repli.

Ainsi définie, la DWV présente un grand nombre d'avantages : possibilité de démodulation (enveloppe, densité spectrale énergétique, fréquence instantanée, retard de groupe) exacte par moments locaux, stabilité par filtrage linéaire et modulation de produit, conservation de supports, invariance par translations et changement d'échelle. De plus, la DWV d'une fréquence modulée linéairement se concentre idéalement sur la loi de fréquence instantanée, quelle que soit la pente de modulation :

$$z_x(t) = e^{i\pi\alpha t^2} \Rightarrow W_x(t, f) = \delta(f - \alpha t)$$

En contrepartie, la DWV présente des difficultés d'interprétation dues à la structure bilinéaire : termes d'interaction, valeurs négatives.

Celles-ci peuvent cependant être réduites par l'intermédiaire de lissages permettant en outre un calcul pratique en réduisant les bornes d'intégration.

2.2. Lissage et pseudo-distribution de Wigner-Ville pour un signal certain

Par lissage d'une DWV, il est possible de proposer une représentation modifiée

$$C_x(t, f, F) = \int_{-\infty}^{+\infty} W_x(t', f') F(t-t', f-f') dt' df \quad (2)$$

où F est une fonction de pondération arbitraire. Ceci définit une classe générale de représentations temps-fréquence dont la densité spectrale à court terme est un cas particulier. Bien que le compromis classique entre quasi-stationnarité et résolution fréquentielle subsiste, on prend naturellement une fonction de lissage séparable ; ceci définit la distribution de Pseudo-Wigner-Ville lissée (notée DPWVL).



Si $x(t)$ est le signal à temps discret obtenu par échantillonnage de x , la version discrète de DPWVL est :

$$DPWVL(t, f) = 2 \sum_{\tau=-N+1}^{N-1} |h_N(\tau)|^2 \cdot \sum_{k=-M+1}^{M-1} g_M(k) z_X(t+k+\tau) z_X^*(t+k-\tau) e^{-i4\pi f\tau} \quad (3)$$

La fonction g opère une réduction des termes d'interaction entre composantes distinctes [2]. La fonction h_N tend à assurer une approximation linéaire dans la tranche d'analyse.

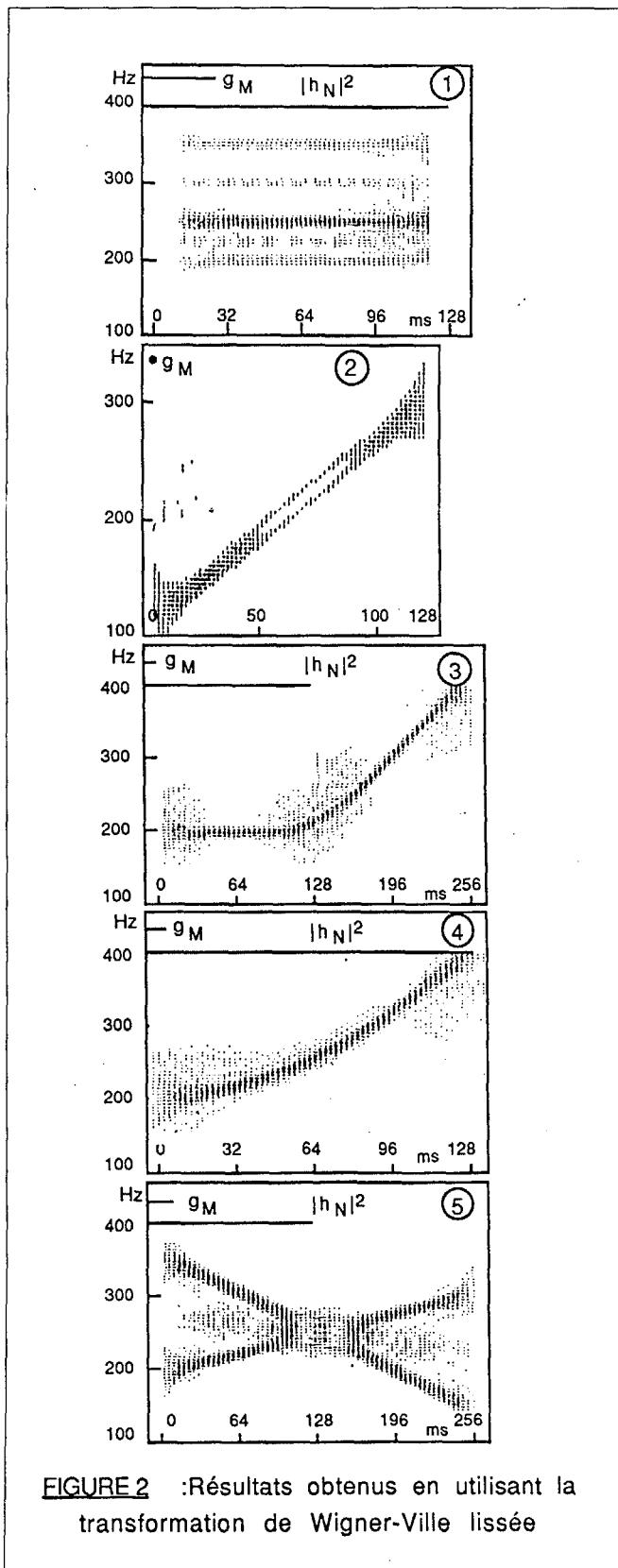


FIGURE 2 :Résultats obtenus en utilisant la transformation de Wigner-Ville lissée

2.3. Spectre de Wigner-Ville pour un processus aléatoire

L'extension de la DWV aux processus aléatoires non-stationnaires peut se faire en introduisant le spectre de Wigner-Ville (SWV) :

$$\bar{W}_X(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_X\left(t+\frac{\tau}{2}, t-\frac{\tau}{2}\right) e^{-i2\pi f\tau} d\tau \quad (4)$$

où K_X est la covariance du processus. Le SWV se réduit à la densité spectrale usuelle si le processus est stationnaire.

L'introduction d'un lissage séparable permet également d'obtenir des performances supérieures à celles du périodogramme à court terme.

2.4. Résultats sur les signaux-tests

Les signaux proposés ont été étudiés de manière systématique par l'équipe du LASSY, en faisant varier d'une part certains paramètres des signaux tels que le RSB ou l'écartement fréquentiel pour le 2^e signal, et d'autre part les paramètres de l'analyse de Wigner-Ville et en particulier la largeur de la fenêtre h_N ([6]). Cependant, pour des raisons de meilleure visualisation, nous présentons les résultats obtenus par P. Flandrin.

De ces résultats, il ressort bien que le lissage dû à la fonction g , même si celle-ci a un support très court, est efficace pour diminuer les termes d'interaction. Pour les cinq signaux étudiés, le spectre de Wigner-Ville retrouve effectivement les modulations de fréquence. Pour le deuxième signal, la séparation des 2 fréquences ne se fait qu'au milieu de la tranche d'analyse.

3 - Méthode du maximum de vraisemblance normalisé et généralisé

3.1. Méthode du maximum de vraisemblance

La méthode de Capon ([7]), dite du "maximum de vraisemblance" peut être appliquée en analyse spectrale. A la fréquence étudiée f , la puissance estimée est celle obtenue à la sortie d'un filtre étroit, centré sur f , de réponse impulsionnelle finie (longueur $P+1$). Ce filtre est calculé pour ne pas modifier la puissance du signal dans une bande étroite autour de f et pour minimiser les puissances dans les autres bandes. La grandeur spectrale ainsi calculée est une puissance dans une bande de fréquence et s'exprime par :

$$P_{\text{cap}}(f) = \frac{1}{S^+ R_X^{-1} S} \quad (5)$$

où : $S^T = [1 \quad \exp(2\pi j f \Delta t) \dots, \quad \exp(2\pi j P \Delta t)]$

R_X : matrice de corrélation de $x(n\Delta t)$, d'ordre $P+1$
+ désigne le transposé-conjugué

Cette méthode d'analyse spectrale peut donc être considérée comme paramétrique dans la mesure où, dans une étape intermédiaire les paramètres d'un filtre sont calculés. Elle peut également être considérée comme adaptative car ces paramètres dépendent du signal lui-même. De plus, cette méthode ne suppose pas a-priori de modèle particulier pour le signal.

3.2. Méthode du maximum de vraisemblance normalisé et généralisé

Remarquant que cette méthode donne une estimation de puissance et non une estimation de densité spectrale, Lagunas ([9], [10]) propose de normaliser $P_{\text{cap}}(f)$ en la divisant par la largeur de bande équivalente du filtre d'analyse, d'où un estimateur de densité spectrale qu'il appelle estimateur du maximum de vraisemblance normalisé :

$$\hat{S}_{\text{MVN}}(f) = \frac{S^+ R_X^{-1} S}{S^+ R_X^{-2} S} \quad (6)$$



Généralisant cette expression, Lagunas et al. ([10]) proposent une famille d'estimateurs spectraux de la forme :

$$\hat{S}_{MVN}^{(q)} = \frac{S^+ R_X^{-q-1} S}{S^+ R_X^{-q-2} S} \quad (7)$$

Lorsque le signal est stationnaire, tous ces estimateurs spectraux convergent vers la densité spectrale exacte lorsque l'ordre p de la matrice de corrélation tend vers l'infini. Une valeur de q élevée accélère la vitesse de convergence de l'estimateur et, visuellement, la résolution fréquentielle est améliorée. Cependant, de trop grandes valeurs de l'exposant peuvent n'apporter que des améliorations négligeables.

3.3. Résultats sur les signaux tests

L'application de cette méthode à des signaux lentement variables au cours du temps se fait par l'utilisation de fenêtres glissantes, de longueur fixe $N \Delta t$. La longueur p du filtre d'analyse est à déterminer par l'utilisateur, ainsi que la valeur de l'exposant q . Les résultats présentés sur les signaux-tests ont été obtenus dans le cadre de l'action de coopération franco-espagnole n° 14/35 et certains se retrouvent en [8].

Dans le cas du deuxième signal, pour un exposant $q=3$, la séparation entre les deux fréquences ne se fait pas. Il a été observé qu'en augmentant l'exposant, cette séparation est réalisée.

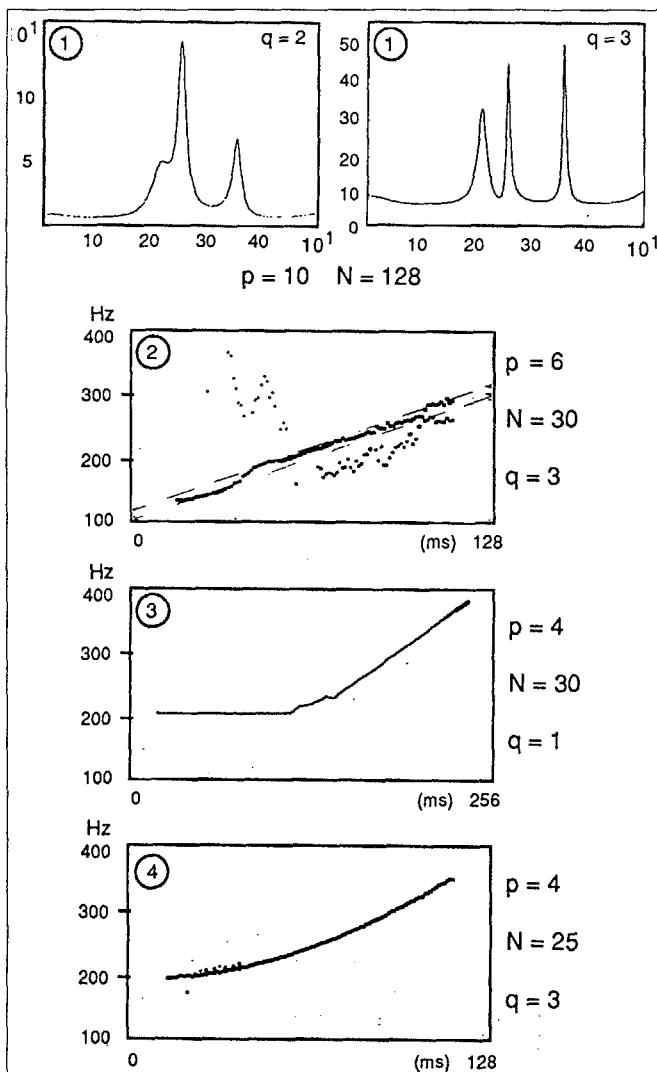


FIGURE 3 : Résultats obtenus par la méthode du maximum de vraisemblance normalisé et généralisé

4 - Méthodes paramétriques supposant un modèle stationnaire de signal

Ces méthodes se développent depuis une vingtaine d'années et la plus simple d'entre elles suppose que le signal à étudier est modélisable comme la sortie d'un filtre linéaire et stationnaire, excité par un bruit blanc, centré de variance σ_e^2 :

$$x(n) = \sum_{k=1}^p a_k x(n-k) + \sum_{l=1}^q c_l e(n-l) + e(n) \quad (8)$$

où la notation $x(n-k)$ représente $x[(n-k) \Delta t]$.

Cette représentation est la représentation usuelle du signal $x(n)$ par un modèle ARMA (p, q) (autoregressif à moyenne glissante). Cependant, le modèle AR(p) a été de loin le plus utilisé jusqu'à maintenant, du fait de sa grande simplicité :

$$x(n) = \sum_{k=1}^p a_k x(n-k) + e(n) \quad (9)$$

La densité spectrale du signal s'écrit en fonction des coefficients du filtre :

$$S_X(f) = \sigma_e^2 \cdot \Delta t \cdot [1 - \sum_{k=1}^p a_k \exp(-2\pi f k \Delta t)]^{-2} \quad (10)$$

4.1. Résolution en utilisant une approche quadratique ([11], [12])

Le problème d'estimation de densité spectrale se réduit alors à un problème d'identification de filtre et N.K.M'Sirdi s'est attaché ([12]) à reclasser les nombreuses méthodes utilisées en automatique. L'identification d'un tel filtre peut se faire en minimisant un critère d'erreur quadratique moyenne :

$$J_1(a) = \sum_{n=1}^N [x(n) - \hat{x}(n)]^2 \quad (11)$$

$$\text{où : } \hat{x}(n) = \sum_{k=1}^p a_k x(n-k) \\ \underline{a}^t = [a_1, a_2, \dots, a_p]$$

et N est la longueur de la fenêtre d'analyse.

Cette minimisation conduit à résoudre un système de la forme

$$R_X \cdot \underline{a} = S$$

où R_X est la matrice de corrélation (d'ordre p) de x et

$$S^t = [r(1) \ r(2) \ \dots \ r(p)]$$

Les méthodes d'estimation récursives résolvent ce problème en évitant l'inversion de la matrice R_X et en utilisant une modélisation d'état pour le vecteur \underline{a} . On obtient ainsi la méthode des moindres carrés récursifs. Cependant, en introduisant des paramètres supplémentaires $\lambda 1$ et $\lambda 2$, on peut arbitrairement modifier le gain d'adaptation pour aboutir à un compromis entre la précision d'estimation et la capacité de poursuite.

N.K. M'Sirdi, dans son travail de classification de ces diverses méthodes ([12]) distingue 9 méthodes qu'il a par ailleurs implantées sur micro-processeur et qui constituent une partie du logiciel "PIM" commercialisé.

Ces méthodes ont été appliquées principalement au signal-test n° 1 et il étudie la rapidité de convergence et la précision des estimations.

N. Martin ([11]) utilise la méthode classique des moindres carrés récursifs (sans facteur d'oubli) sur une fenêtre glissante dont la longueur minimale est fixée. Cette fenêtre peut augmenter ou diminuer au cours du traitement de manière à s'adapter à des "temps de stationnarité" variables ; le test

permettant à la longueur de la fenêtre de varier porte sur la puissance estimée de l'erreur. Pour les signaux étudiés, les résultats obtenus avec une mémoire fixe sont cependant peu différents de ceux obtenus avec une mémoire variable.

Les résultats obtenus sur les signaux-tests 2, 3, 4 et 5 sont présentés figure 4. Pour le signal 2, les deux rampes de fréquence ne sont pas séparées. Le résultat obtenu pour le signal 3 ne se distingue pas de celui obtenu par la méthode du maximum de vraisemblance normalisé. Pour le signal 4 qui comporte une modulation parabolique de fréquence et qui est non bruité, un choix de l'ordre $p = 4$ produit un dédoublement de fréquence (non représenté). Pour un choix $p = 2$ et $N = 25$, la représentation obtenue par localisation du pôle du filtre AR est une courbe intermédiaire entre la fréquence instantanée et la loi de commande. Pour le signal 5, les résultats présentés sont pour un choix de paramètres $p = 6$ et $N = 30$ d'une part et $p = 6$ et $N = 40$ d'autre part. Dans les 2 cas, il y a une mauvaise détermination au croisement.

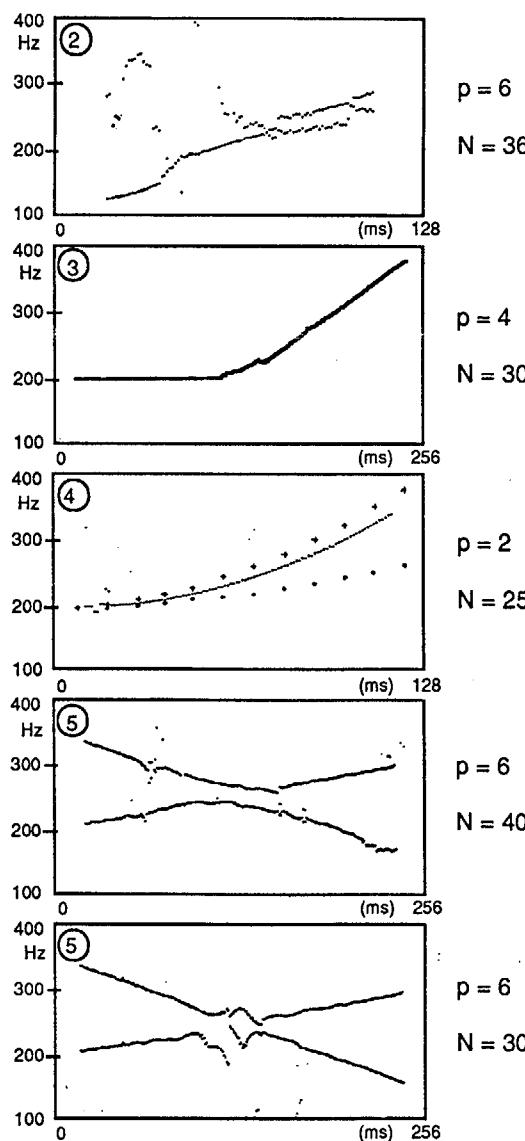


FIGURE 4 : Résultats obtenus en utilisant les Moindres Carrés Récursifs sur des fenêtres de longueur N .

4.2. Résolution en utilisant une approche bayésienne ([13])

Houacine et Demoment ([13]) remarquent que, lorsque p est comparable ou supérieur à N , la solution du problème des moindres carrés (11) est inacceptable. Il s'agit d'un problème mal-posé qui sera stabilisé par incorporation d'une contrainte ou information à priori, en minimisant le critère :

$$J_2(a) = \sum_{n=1}^N [x(n) - \hat{x}(n)]^2 + \mu \|a - a_0\|_R^2 \quad (12)$$

où R est une matrice définie positive et μ une constante positive. La première partie du critère J_2 traduit la conformité du modèle vis à vis des données tandis que la seconde donne la conformité vis à vis de l'a-priori. La constante μ traduit le poids relatif de ces deux parties. Le choix d'une norme quadratique exprime ce que les auteurs appellent un "a-priori de douceur" sur le vecteur des paramètres a .

La minimisation du critère $J_2(a)$ est équivalente à la maximisation de :

$$l(a) = \exp \{ (-1/2 \sigma_e^2) (\sum [x(n) - \hat{x}(n)]^2 + \mu \|a - a_0\|_R^2) \} \quad (13)$$

La solution a apparaît alors comme la moyenne de la loi a-posteriori définie par la distribution conditionnelle des données et de la loi a-priori donnée :

$$f(a / a_0, \pi_0) \sim \exp \{ -1/2 \|a - a_0\|_{\pi_0}^2 \} \quad (14)$$

$$\text{où } \pi_0 = (\sigma_e^2 / \mu) R$$

Les paramètres a_0 et π_0 sont appelés les hyperparamètres du problème. Le modèle retenu sera celui qui maximise la vraisemblance de ces hyperparamètres. Le choix de l'a-priori est fait au vu des données : les paramètres du modèle dépendent donc des données et cette méthode peut donc être considérée comme adaptative.

En pratique, Houacine et Demoment ([13]) choisissent $a_0 = 0$ et $\pi_0 = \sigma_a^2 I$ et il ne subsiste alors qu'un seul hyperparamètre $\mu = \sigma_a^2 / \sigma_e^2$. De plus la variance du bruit générateur est normalisée ($\sigma_a^2 = 1$). La solution est calculée en associant un modèle d'état au problème et en utilisant un filtre de Kalman rapide obtenu par factorisation de Chandrasekhar. Ce filtre de Kalman permet également le calcul en ligne de la log-vraisemblance de l'hyperparamètre μ , ce qui permet sa détermination optimale à partir des données.

La méthode précédente, valable dans un cas stationnaire, est étendue au cas non-stationnaire en supposant qu'il existe un temps de quasi stationnarité (longueur $N\Delta t$). Les données sont alors séparées en blocs adjacents de longueur N et le résultat du traitement d'un bloc est utilisé comme a-priori pour le bloc suivant. Après le traitement de chaque bloc, la d.s.p. instantanée est calculée à partir des paramètres estimés.

Les résultats sur les signaux-tests sont présentés figure 5. Sur le signal 2, les deux sinusoïdes ne sont pas séparées. Pour les autres signaux, les diverses modulations de fréquence des signaux-tests sont bien détectées. Pour le 5ème signal, la zone d'indétermination au croisement des rampes a une durée relativement courte.

4.3 - Méthode supposant un modèle de type sinusoïdes bruitées

Il est bien connu que l'observation obéit à un modèle ARMA particulier pour lequel les coefficients de la partie AR sont égaux à ceux de la partie MA. La méthode de Pisarenko est alors la plus adaptée. Dans [6], Alengrin et al proposent un algorithme adaptatif de Pisarenko qui est appliqué aux signaux 1 et 4. Cette étude est également présentée dans la même session du colloque GRETSI 1987.

5 - Méthode paramétrique identifiant un modèle de signaux non-stationnaires ([6] et [16] - [22])

La classe de signaux non-stationnaires considérée est définie par l'équation :

$$x(t) = \sum_{k=1}^p a_k(t) x(t-k) + e(t) \quad (15)$$

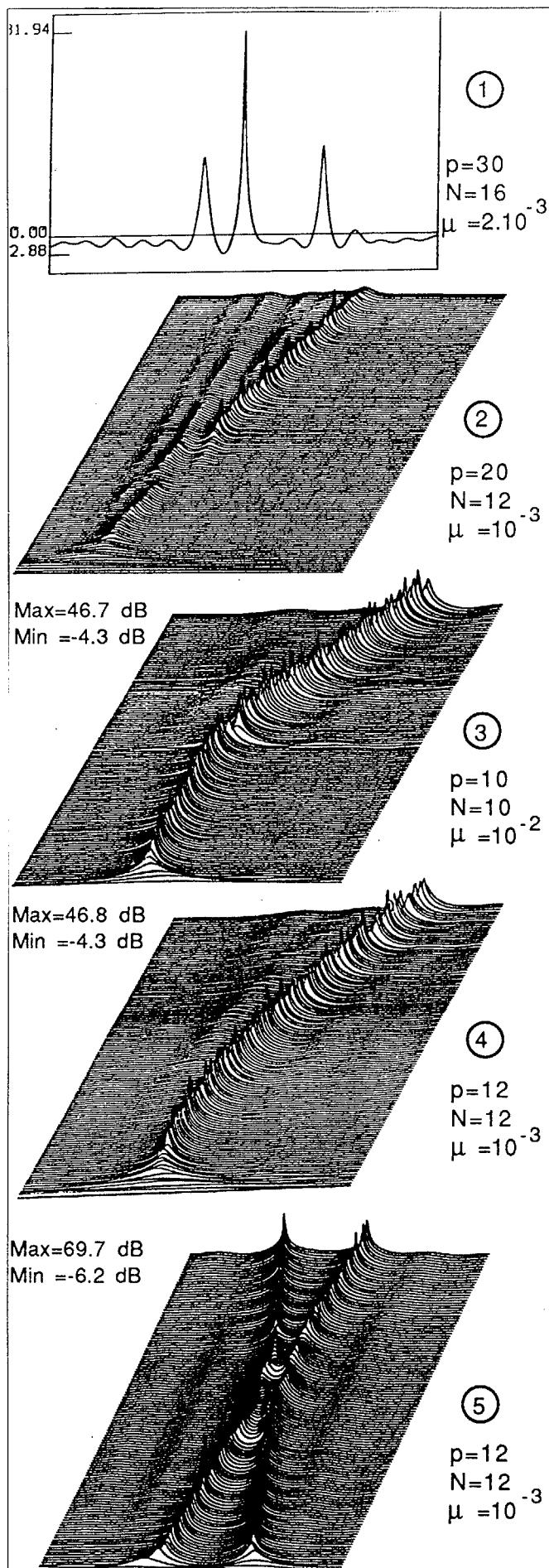


FIGURE 5 Résultats obtenus en utilisant un modèle AR. long et un filtrage de Kalman rapide.

qui ne diffère de l'équation (9) que par le fait que les paramètres a_k sont des fonctions certaines du temps. Les paramètres du modèle évoluent lentement et peuvent être approchés par une combinaison linéaire de fonctions du temps appelées fonctions de base ([16], [17], [18]) :

$$a_k(t) = \sum_{j=0}^m a_{jk} f_j(t) \quad (16)$$

où $f_j(t)$, $j = 0, m$ sont les éléments de la base.

Les fonctions usuelles sont :

- les fonctions sinusoïdales
- les polynômes de Legendre
- les fonctions sphéroïdales aplatis.

L'équation (15) peut s'écrire, pour $t=n\Delta t$:

$$x(n) + \sum_{k=1}^p X_{n-k}^T a_k = e(n) \quad (17)$$

où $X_{n-k}^T = [x_{(n-k)}, f_0(n-k), \dots, x_{(n-k)}, f_m(n-k)]$

$$a_k^T = [-a_{k0}, \dots, -a_{km}]$$

Le problème consiste à estimer, pour une séquence d'observations $\{x(n)\}$, $n \in [1, N]$, et pour une base donnée, les $p(m+1)$ paramètres constants.

Le vecteur de paramètres θ (de dimension $m(p+1)$) est obtenu en résolvant les équations de Yule-Walker :

$$A \cdot \theta = x \quad (18)$$

où $\theta^T = [a_{10}, \dots, a_{p0}, \dots, a_{pm}]$

$$x = \sum_{n=1}^N \begin{vmatrix} X(n-1) \\ \vdots \\ X(n-p) \end{vmatrix} x(n)$$

$$A = \sum_{n=1}^N \begin{vmatrix} X(n-1) \\ \vdots \\ X(n-p) \end{vmatrix} [X_{(n-1)}^T \dots X_{(n-p)}^T]$$

Une méthode d'estimation globale calculant la matrice A et le vecteur θ sur l'ensemble des données peut être utilisée ([6]) pour résoudre (18). Nous décrivons ici la méthode récursive des moindres carrés utilisée dans [6] et [20].

Si on considère l'observation non bruitée du signal x ($y(n) = x(n)$), l'estimation $\hat{\theta}$ de θ est obtenue par l'algorithme

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} + K_n [y(n) - Y_{n-1}^T \hat{\theta}_{n-1}] \quad (19-1)$$

$$K_n = P_{n-1} Y_{n-1} / Q_n \quad (19-2)$$

$$Q_n = 1 + Y_{n-1}^T P_{n-1} Y_{n-1} \quad (19-3)$$

$$P_n = P_{n-1} - P_{n-1} Y_{n-1} Y_{n-1}^T P_{n-1} \quad (19-4)$$

Lorsque le signal étudié est $y(t) = x(t) + e(t)$ où $e(t)$ est un bruit blanc centré stationnaire, de variance σ_e^2 et où $x(t)$ vérifie :

$$x(t) - \sum_{k=1}^p a_k(t) x(t-k) = 0 \quad ,$$

le signal observé est décrit par un modèle ARMA particulier. Soit $\underline{\theta}$ le vecteur de paramètres décrivant le signal $x(n)$.

L'estimateur $\hat{\underline{\theta}}$ de $\underline{\theta}$ obtenu en utilisant l'algorithme (19) des moindres carrés sur les valeurs observées du signal est biaisé, de biais

$$- P_n \sigma_e^2 F_n \underline{\theta}$$

$$\text{avec } F_n = \sum_{t=1}^n \begin{vmatrix} F_t & 0 \\ F_t & F_t \\ 0 & F_t \end{vmatrix}$$

$$\text{et } F_t = \begin{vmatrix} f_0(t) \\ \vdots \\ f_m(t) \end{vmatrix} \quad | f_0(t) \dots f_m(t) | .$$

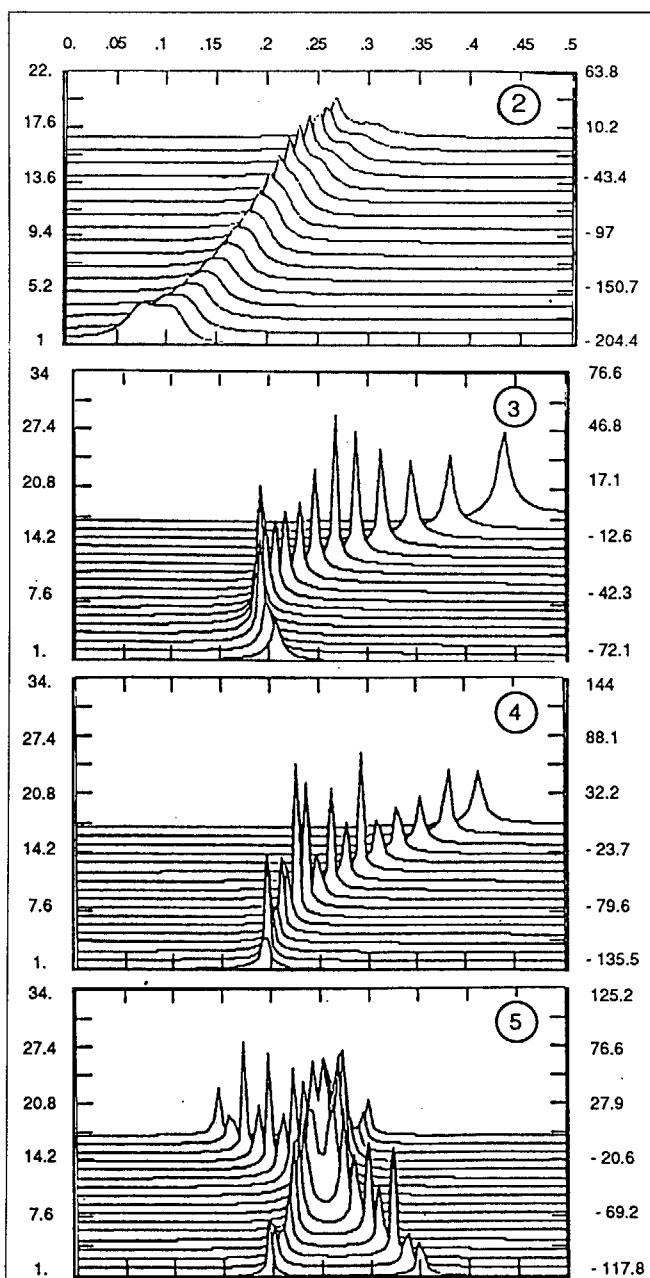


FIGURE 6 : Résultats obtenus en projetant sur une base orthonormée de polynômes de Legendre

Dans [20], Alengrin et als proposent un algorithme récursif des moindres carrés modifié pour obtenir un estimateur non biaisé.

Les résultats présentés figure 6 concernent les signaux 2, 3, 4 et 5 et ont été obtenus par la méthode récursive qui apparaît comme donnant des résultats meilleurs. Les signaux ont été identifiés à des processus AR d'ordre 2 pour les n° 3 et 4 et d'ordre 4 pour les n° 2 et 5. La base des fonctions du temps utilisée a été la base des polynômes orthonormés de Legendre.

Conclusion

Nous avons ici cherché à résigner un ensemble de méthodes assez diverses et qui sont couramment utilisées en analyse spectrale. Seules, la méthode utilisant la transformation de Wigner-Ville et celle utilisant une base de fonctions dépendant du temps supposent explicitement des signaux non-stationnaires. Les autres méthodes supposent une "quasi-stationnarité" et appliquent des techniques valables dans le cas stationnaire soit sur des fenêtres glissantes, soit en introduisant un facteur d'oubli. La méthode proposée par Houacine et Demoment est intermédiaire dans la mesure où les résultats obtenus sur une fenêtre constituent les conditions initiales pour la fenêtre suivante.

Pour évaluer les résultats obtenus, il aurait été intéressant de pouvoir comparer des représentations temps-fréquence de même type. Vu la grande diversité des moyens de calculs utilisés, ceci n'a pu être réalisé.

De plus, il est apparu que l'évaluation de ces méthodes ne pouvait être faite simultanément en fonction de plusieurs critères. De matière automatique, le critère retenu a été celui de la détection, de la séparation et du suivi des "raies spectrales" qui composent les signaux synthétiques.

Si aucun résultat concernant les périodogrammes à court terme n'a été présenté, il a cependant été observé que les algorithmes présentés donnaient de meilleurs résultats. Les spécifications données pour le signal 2 étaient trop sévères et aucune méthode n'arrive à séparer les deux modulations de fréquences. En ce qui concerne les autres signaux, les méthodes utilisées permettent bien la détection, mais des biais importants peuvent apparaître. Les problèmes liés à l'estimation du nombre de composants est souvent masqué par le réglage des différents paramètres (longueur p des filtres en particulier) et est de ce fait souvent pris comme connaissance a-priori. Les déterminations des puissances et des phases de chaque composante n'ont été qu'abordées.

REFERENCES

- 1 - Flandrin, P., Escudé, B. : "An interpretation of the pseudo-Wigner-Ville distribution", Sig. Proc. 6 (1), pp. 27-36 (1984).
- 2 - Flandrin, P. : "Some features of time-frequency representations of multicomponent signals", IEEE ICASSP-84, pp.41B4.1-41B4.4, San Diego (1984).
- 3 - Martin, W., Flandrin, P. : "Wigner-Ville spectral analysis of non-stationary processes", IEEE Trans. on ASSP, ASSP-33 (6), pp.1461-1470 (1985)
- 4 - Grenier, Y., Aboutajdine, D. : "Comparaison des représentations temps-fréquence de signaux présentant des discontinuités spectrales", Ann. Télécom. 38 (11-12), pp.429-442 (1983).
- 5 - Flandrin, P. : "When is the Wigner-Ville spectrum non negative ?" EUSIPCO-86-La Haye 1986-pp. 239-242.
- 6 - Alengrin G. et als : "Algorithmes d'analyse spectrale adaptative : application aux signaux-tests GRECO-SARTA." Rapport de recherche LASSY. Univ. de Nice.



- 7 - Capon J. (1969) : "High Resolution frequency wave-number spectrum analysis". Proc. IEEE, Vol. 57, Aug. 1969, pp. 1408-1418.
- 8 - Fernandez J., Martin N. (Sept. 1986) : "Adaptive Spectral Estimation by ML Filtering EUSIPCO". La Hague. Hollande. Sept. 1986 pp. 323-326.
- 9 - Lagunas-Hernandez M.A., Gasull-Llampallas A. : "An improved maximum likelihood method for power spectral density estimation". IEEE Trans. on Acoustics, speech and Signal Processing Vol. ASSP-32, n°1, February 1984.
- 10 - Lagunas M.A., Santamaria M.E., Gasull A., Moreno A. : "Maximum likelihood filters in spectral estimation problems". Signal Processing, North-Holland Editor, Vol. 10, n°1, January 1986, pp.19-34.
- 11 - Martin N. (1986) : "An AR Spectral analysis of non-stationary signals", Signal Processing, Vol. 10, n°1, January 1986
- 12 - M'Sirdi N.K. : "Techniques de modélisation récursives pour l'analyse spectrale paramétrique adaptative", Rapport de recherche LAG, Mai 1986.
- 13 - Houacine A. et Demoment G. : "Approche bayesienne de l'analyse spectrale adaptative : modèles AR long et filtrage de Kalman rapide", Article soumis à Traitement du Signal.
- 14 - Demoment G. : "Algorithmes rapides pour le filtrage, la prédiction et l'identification des processus stochastiques à temps discret", Cours de l'ESE, 1986, n°M009/86.
- 15 - Kitagawa G., Gersch W: "A smoothness priors long AR Model Method for Spectral Estimation", IEEE Trans. on Aut. Control, 1985, Vol. AC-30, pp. 57-65.
- 16 - Grenier Y. : "Time-dependent ARMA model of non-stationary signals", IEEE Trans., ASSP, Vol. 31, n°4, pp. 899-911, Aug. 1983.
- 17 - Grenier Y. : "Comparaison des représentations temps-fréquence de signaux présentant des discontinuités spectrales", Ann. Télécom. (1983), Vol. 38, n°11-22, pp. 429-442.
- 18 - Aboutajdine D., Najim M. : "Time varying linear prediction - New results", Morocco workshop on signal processing, Marrakech (Maroc), Sep. 1984.
- 19 - Slepian : "Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty -V : the discrete case", B.S.T.J., Vol. 57, n°5, May-June 1978.
- 20 - Alengrin G., Barlaud M., Menez J. : "Unbiased parameter estimation of non-stationary signals in noise", IEEE Trans. on ASSP (1986), Vol. 34, n°5, pp. 1319-1322.
- 21 - Morf M., Dickinson B., Kailath T., Vieira A. : "Efficient solution of covariance equations for linear prediction", IEEE Trans., ASSP, Vol. 25, n°5, pp. 429-433.
- 22 - Grenier Y. : "Modélisation de signaux non-stationnaires", Thèse d'Etat, Université de Paris-Sud, Octobre 1984.