



## MANOEUVRE OPTIMALE EN TRAJECTOGRAPHIE PASSIVE A PARTIR D'AZIMUT

**Jean-Michel PASSERIEUX, Dominique VAN CAPPEL**

**THOMSON SINTRA Activités Sous-Marines**  
525, route des Dolines, BP 138  
06561 VALBONNE CEDEX FRANCE

**RESUME :** En Trajectographie Passive par Azimut (TPA), la trajectoire de l'observateur influe fortement sur la précision d'estimation de la trajectoire de l'émetteur. Nous appliquons ici des éléments de la théorie du contrôle optimal pour déterminer la trajectoire de l'observateur qui optimise un critère de précision basé sur la matrice d'information de Fisher. Les conditions nécessaires d'optimalité sont établies et intégrées numériquement. Finalement, des exemples de trajectoires optimales sont présentés.

### INTRODUCTION

La détermination de la distance d'un émetteur mobile par un récepteur disposant de senseurs passifs qui délivrent seulement des mesures d'angle (sonar passif, senseurs optiques) est un problème d'estimation non linéaire classique. Un cas particulier intéressant est la Trajectographie Passive à partir d'Azimut (TPA) : l'observateur relève l'azimut de l'émetteur pendant un laps de temps suffisant, suppose que celui-ci se déplace à cap et vitesse constants et déduit sa trajectoire des mesures par une méthode de moindres carrés [1].

Dans ces conditions, on sait que, même avec des mesures parfaites, une manœuvre (i.e. un changement de cap ou de vitesse) de l'observateur est nécessaire pour assurer l'observabilité du problème (i.e. l'unicité de la solution [2]). On a par ailleurs observé que, lorsque les mesures sont entachées d'erreurs, la précision dépend fortement de la trajectoire de l'observateur.

Dans cet article, nous considérons le cas d'un observateur qui se déplace avec une vitesse constante en module et cherchons la séquence des caps de cet observateur qui conduit aux meilleurs résultats en TPA (i.e. maximise un critère de précision calculé à partir de la matrice d'information de Fisher).

A notre connaissance, ce problème de manœuvre optimale en TPA a surtout été abordé dans des cas plus simples (trajectoires de l'observateur formées de deux ou trois segments rectilignes parcourus à vitesse constante [3, 4], émetteur immobile [5]). En fait, seul Olsder [6] exhibe de "vraies" trajectoires optimales (mais au moyen d'un algorithme numérique lourd). Dans la suite, pour obtenir les trajectoires optimales, nous mettons en oeuvre des techniques classiques en contrôle optimal [9, 10]. Après avoir rappelé les principes de base de la TPA, nous montrons que les conditions nécessaires d'optimalité (équations d'Euler) sont simples et peuvent même s'intégrer en partie analytiquement. Ce résultat nous permet d'obtenir quelques propriétés des trajectoires optimales, puis de déterminer ces trajectoires par un algorithme itératif simple.

### 1 - POSITION DU PROBLEME

Un observateur P (porteur) cherche à localiser un émetteur S (source) à partir de mesures successives de son azimut (tous deux sont dans un même plan horizontal X-Y).

**ABSTRACT :** In Bearings-Only Tracking, ownship maneuver is critical to ensure observability and obtain an accurate source location. Here optimal control theory is applied to the determination of the course of a constant speed (in modulus) observer that minimizes an accuracy criterion based upon the Fisher Information matrix. Necessary conditions for optimal maneuver (Euler equations) are established and resolved by an iterative numerical algorithm. Examples of optimal trajectories are finally given.

L'observateur P se déplace avec une vitesse V (constante) et un cap  $u(t)$  (la variable de commande du système). En t, sa position  $\{x(t), y(t)\}$  est obtenue en intégrant l'équation de dynamique.

$$\frac{dx}{dt} = V \sin u(t) \quad (1a)$$

$$\frac{dy}{dt} = V \cos u(t) \quad (1b)$$

avec les conditions initiales :

$$x(0) = x_0 ; y(0) = y_0 \quad (2)$$

On suppose de plus que l'émetteur S se déplace en mouvement rectiligne uniforme. Sa trajectoire est donc entièrement caractérisée par la valeur, à un instant t quelconque, du vecteur :

$$\underline{\theta}(t) = (x_s(t) \ y_s(t) \ \dot{x}_s \ \dot{y}_s)'$$

En effet, quels que soient t' et t'', on a :

$$\underline{\theta}(t'') = \Phi(t'', t') \underline{\theta}(t') \quad (3)$$

$$\text{avec : } \Phi(t'', t') = \begin{pmatrix} I_2 & (t'' - t')I_2 \\ 0_2 & I_2 \end{pmatrix}$$

En pratique, l'azimut, théoriquement égal à :

$$\beta(t) = \tan^{-1} \left\{ \frac{x_s(t) - x(t)}{y_s(t) - y(t)} \right\} \quad (4)$$

est relevé uniquement à des instants discrets  $t_i = i\Delta$ . Par ailleurs, les mesures d'azimut  $\beta_m(t_i)$  sont perturbées par des erreurs  $\eta(t_i)$  supposées ici gaussiennes, centrées et décorellées, d'écart-type  $\sigma$  constant et connu.

Enfin on désigne par  $\underline{B}_m(t) = (\beta_m(t_1) \dots \beta_m(t_k))'$  le vecteur des k mesures d'azimut recueillies en t ( $t_k \leq t \leq t_{k+1}$ ) et par  $\underline{B}(t, \underline{\theta}(t)) = (\beta(t_1, \underline{\theta}) \dots \beta(t_k, \underline{\theta}))'$  celui des azimuts calculés aux mêmes instants pour une valeur arbitraire de  $\underline{\theta}(t)$  (en utilisant (3) et (4)).

Avec les hypothèses et notations ci-dessus, il est bien connu [1] que l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\underline{\theta}(t)$  à partir du lot de mesure  $\underline{B}_m(t)$ , noté  $\hat{\underline{\theta}}(t)$ , minimise le critère :

$$J = \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t_i \leq t} \left( \beta_m(t_i) - \beta(t_i, \hat{\underline{\theta}}(t)) \right)^2 \quad (5)$$

En TPA, on sait aussi [1] que, à condition que l'écart-type  $\sigma$  des erreurs de mesure ne soit pas trop grand et que l'observateur P ait manoeuvré de manière adéquate, l'estimateur  $\hat{\theta}$  est sans biais et statistiquement efficace. La matrice de covariance de l'erreur d'estimation est donc égale à l'inverse de la matrice de Fisher F(t), ici :

$$F(t) = \sigma^{-2} \cdot \sum_{t_k \leq t} \Phi(t_k, t) a(t_k) a'(t_k) \Phi'(t_k, t) \quad (6)$$

ou encore [8], de manière récursive en temps :

$$F(t_k) = \Phi(t_{k-1}, t_k) F(t_{k-1}) \Phi'(t_{k-1}, t_k) + \sigma^{-2} \underline{a}(t_k) \underline{a}'(t_k) \quad (7)$$

avec la condition initiale :

$$F(0) = F_0 = 0 \quad (8)$$

$$\text{et : } \underline{a}(t_k) = \frac{1}{r(t_k)} \begin{pmatrix} \cos \beta(t_k) & -\sin \beta(t_k) & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

Dans la suite, bien que les mesures d'azimut soient recueillies à des instants discrets, nous utiliserons plutôt un équivalent "temps continu" de (7) [7] :

$$\frac{dF}{dt} = -A' \cdot F(t) - F(t) \cdot A + \sigma^{-2} \underline{a}(t) \underline{a}'(t) \quad (10)$$

avec :  $A = d\Phi(t, \tau)/dt$

On se propose de déterminer la manoeuvre optimale de l'observateur pour une source de trajectoire donnée, c'est-à-dire, celle à laquelle va correspondre la meilleure précision en TPA (caractérisée par le biais et la variance d'estimation de  $\hat{\theta}(T)$ ).

Les "bonnes" propriétés de l'estimateur  $\hat{\theta}$  sont très importantes de ce point de vue. Puisque celui-ci est sans biais et statistiquement efficace, pour optimiser la manoeuvre de l'observateur, il va suffire d'optimiser un critère de précision Q calculé à partir des éléments de la matrice de Fisher F(T) à l'instant final T. Parmi les critères possibles nous considérons le volume de l'ellipsoïde d'incertitude. Ce volume est proportionnel à  $|F(T)|^{1/2}$ . On prend donc :

$$Q(T, \underline{X}(T)) = -\log |F(T)| \quad (11)$$

Pour un émetteur de trajectoire donnée, le critère Q ne dépend en fait que de la commande u(t) sur [0, T]. En effet, en utilisant (1) et (2), il est facile à partir de u(t) de reconstituer la trajectoire de l'observateur sur [0, T], puis de calculer la matrice F(T) par (6) et finalement, le critère Q par (11).

Jusqu'à maintenant, la plupart des publications consacrées à la manoeuvre optimale en TPA se sont limitées au cas où la trajectoire de l'observateur est formée d'un petit nombre N (typiquement N = 2 ou 3) de tronçons rectilignes ou "jambes", de caps respectifs  $\{u_1, u_2, \dots, u_N\}$ , séparés par des changements de cap instantanés en  $\{t_1, t_2, \dots, t_{N-1}\}$ . La détermination de la manoeuvre optimale se ramène alors à un problème classique d'optimisation à  $2N-1$  variables qui peut être résolu par les techniques habituelles (recherche exhaustive du minimum sur les noeuds d'un maillage de  $R^{2N+1}$ ) [3] ou techniques plus sophistiquées [4]).

Ici, au contraire, la classe des trajectoires possibles de l'observateur est beaucoup plus large : on suppose seulement que u(t) est une fonction continue par morceaux sur [0, T]. La détermination du cap optimal  $u^*(t)$  requiert alors la résolution d'un problème plus compliqué de "calcul de variations". L'intérêt d'une telle démarche est double :

- d'une part fournir de "vraies" trajectoires optimales (si on se limite à des trajectoires formées de N jambes, rien ne garantit qu'une trajectoire à N+1 jambes n'aura pas des performances bien meilleures que la meilleure des trajectoires à N jambes),
- d'autre part, uniquement par des calculs analytiques, permettre d'obtenir des propriétés intéressantes des manoeuvres optimales.

## 2 - EQUATIONS D'EULER - PRINCIPE DU MAXIMUM

On note :

$$\underline{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) & y(t) & F_{11}(t) & \dots & F_{44}(t) \end{pmatrix}$$

le "vecteur d'état" (à 18 composantes) qui décrit le système commandé par u(t). L'équation de dynamique vérifiée par  $\underline{X}(t)$  :

$$\frac{d\underline{X}}{dt} = f(\underline{X}(t), u(t), t) \quad (12)$$

est obtenue à partir de (1) et (10), les conditions aux limites :

$$\underline{X}(0) = \underline{X}_0$$

sont données par (2) et (8). On note aussi :

$$\underline{\varphi}(t) = \begin{pmatrix} \varphi_x(t) & \varphi_y(t) & \varphi_{11}(t) & \dots & \varphi_{44}(t) \end{pmatrix}$$

le vecteur (à 18 composantes) des variables de Lagrange (ou variables adjointes) associées aux composantes de  $\underline{X}(t)$ . En l'absence de terme intégral dans le critère Q à optimiser, le Hamiltonien H( $\underline{X}(t)$ ,  $\underline{\varphi}(t)$ , u(t), t) s'écrit [9] :

$$H = \underline{\varphi}'(t) \cdot f(\underline{X}(t), u(t), t) \quad (14)$$

En désignant maintenant par  $\Phi_F(t)$  la matrice carrée 4x4 d'éléments  $\varphi_{ij}(t)$ , on a :

$$\sum_{i,j} \varphi_{ij} \cdot \frac{dF_{ij}}{dt} = \text{tr} \left\{ \frac{dF'}{dt} \cdot \Phi_F \right\}$$

d'où on déduit [7] :

$$H = V \cdot \left( \varphi_x(t) \cdot \sin u(t) + \varphi_y(t) \cdot \cos u(t) \right) - \text{tr} \left\{ [F'(t) \cdot A + A' \cdot F'(t)] \Phi_F(t) \right\} + \sigma^{-2} \underline{a}'(t) \Phi_F(t) \underline{a}(t) \quad (15)$$

Le principe du maximum [10] indique alors que, à tout instant, le cap optimal  $u^*(t)$ , minimise le Hamiltonien H( $\underline{X}^*(t)$ ,  $\underline{\varphi}^*(t)$ , u(t), t), les valeurs de  $\underline{X}^*(t)$  et  $\underline{\varphi}^*(t)$  étant de plus reliées par :

- l'équation de dynamique (12) avec les conditions aux limites (13),
- les équations d'Euler :

$$\frac{d\underline{\varphi}}{dt} = - \left( \frac{\partial H}{\partial \underline{X}} \right) = - \left( \frac{\partial f}{\partial \underline{X}} \right) \cdot \underline{\varphi}(t) \quad (16)$$

avec les conditions aux limites (conditions de transversalité) :

$$\underline{\varphi}(T) = - \left( \frac{\partial Q}{\partial \underline{X}} \right)_{t=T} \quad (17)$$

En minimisant le Hamiltonien (15) par rapport à u(t), on obtient le cap optimal, noté  $u^*(t)$ , en fonction de  $\varphi_x^*(t)$  et  $\varphi_y^*(t)$

$$u^*(t) = \tan^{-1} \left\{ \varphi_x^*(t) / \varphi_y^*(t) \right\} + \pi \quad (18)$$

Dans ce cas, aussi longtemps que  $\varphi_x^*$  et  $\varphi_y^*(t)$  sont inconnues, l'équation (18) ne fournit aucune information utile sur le cap optimal  $u^*(t)$ . Tout au plus peut-on observer que, sur la trajectoire optimale, le vecteur vitesse de P et le vecteur ( $\varphi_x^*$ ,  $\varphi_y^*(t)$ ) sont colinéaires et de directions opposées).

En revanche, si on considère d'autres classes de trajectoires admissibles pour l'observateur, le Principe de Maximum fournit souvent des informations utiles. Supposons par exemple que l'observateur se déplace en ligne droite, avec un cap K constant (pour simplifier  $K = \pi/2$ ) et une vitesse variable u(t), la variable de commande, bornée. Les équations de dynamique relatives à la position de l'observateur deviennent :

$$dx/dt = u(t) \quad (19a)$$

$$dy/dt = 0 \quad (19b)$$



avec la contrainte :

$$V_{\min} \leq u(t) \leq V_{\max} \quad (20)$$

Le Hamiltonien s'écrit donc :

$$H = u(t) \varphi_x(t) + \text{autres termes indépendants de } u(t) \quad (21)$$

Le principe du maximum indique alors que, mis à part sur des portions singulières de la trajectoire optimale où  $\varphi_x^*(t)$  serait identiquement nul, la vitesse optimale de l'observateur  $u^*(t)$ , est soit  $V_{\min}$ , soit  $V_{\max}$  (selon le signe de  $\varphi_x^*(t)$ ). Supposons que, pour déterminer la manœuvre optimale, on utilise une méthode exhaustive de recherche du minimum du critère  $Q$  après avoir segmenté la trajectoire de l'observateur en  $N$  tronçons de même durée  $T/N$ , parcourus chacun à la vitesse  $u_i$ . Ce qui précède montre qu'il sera inutile de mailler finement l'intervalle  $[V_{\min}, V_{\max}]$  des vitesses admissibles puisque  $u(t) = V_{\min}$  ou  $V_{\max}$  sur la trajectoire optimale.

### 3 - DETERMINATION DU CAP OPTIMAL

A première vue, la résolution exacte du problème posé au paragraphe 2 est délicate. Elle requiert en effet la résolution de 36 équations différentielles couplées (l'équation de dynamique (12) et les équations d'Euler (16)) dont certaines sont non linéaires, avec des conditions aux limites aux deux extrémités (en 0 pour  $X$  et en  $T$  pour  $\varphi$ ).

Pour obtenir une solution, on peut tout d'abord remarquer que, les équations d'Euler (16) se décomposent en [7] :

$$\frac{d\varphi_x}{dt} = -\frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial}{\partial x} \{ \underline{a}'(t) \varphi_F(t) \cdot \underline{a}(t) \} \quad (22a)$$

$$\frac{d\varphi_y}{dt} = -\frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial}{\partial y} \{ \underline{a}'(t) \varphi_F(t) \cdot \underline{a}(t) \} \quad (22b)$$

$$\frac{d\varphi_F}{dt} = A \cdot \varphi_F(t) + \varphi_F(t) \cdot A' \quad (22c)$$

La dernière de ces équations (celle relative à  $\varphi_F$ ) est linéaire et s'intègre explicitement [9-p453]. En utilisant les conditions de transversalité (17), on obtient après quelques calculs [7] :

$$\varphi_F(t) = \Phi(t, T) \cdot F^{-1}(T) \Phi'(t, T) \quad (23)$$

Parvenu à ce point, on peut faire deux remarques :

- En substituant (23) dans les équations d'Euler relatives à  $\varphi_x$  et  $\varphi_y$  (eq 22a et b), on peut éliminer complètement les variables de Lagrange  $\varphi_F(t)$ .
- Ceci fait, dans les équations d'Euler relatives à  $\varphi_x$  et  $\varphi_y$ , seule la matrice de Fisher  $F(T)$  à l'instant final  $T$  apparaît.

On a donc pu éliminer complètement les variables  $F(t)$  et  $\varphi_F(t)$  ce qui simplifie considérablement le problème puisqu'on a plus que 4 équations différentielles couplées (en  $x$ ,  $y$ ,  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$ ) au lieu de 36 initialement. Finalement, pour déterminer complètement la trajectoire optimale de l'observateur, nous avons utilisé un algorithme numérique itératif semblable à ceux décrits en [6, 9]. Le principe de cet algorithme, décrit de manière détaillé en [7], est le suivant : partant d'une commande initiale arbitraire, notée  $\underline{u}^{(0)}(t)$  (pour  $t \in [0, T]$ ), on construit une séquence de  $\{\underline{X}^{(k)}, \underline{\varphi}^{(k)}, \underline{u}^{(k)}\}$ , qui vérifie de mieux en mieux les CN d'optimalité et assure la décroissance du critère  $Q$ .

### 4 - EXEMPLES DE TRAJECTOIRES OPTIMALES

Les paramètres utilisés pour le premier exemple de trajectoire optimale sont les suivants :

- En  $t = 0$ , l'observateur est en  $(0, 0)$ . Sa vitesse est égale à 3 ms.
- Initialement l'émetteur est en  $(0, 10 \text{ km})$ . Il se déplace ensuite à 5 m/s avec un cap égal à 120 degrés.

- L'azimut est relevé toutes les secondes de 0 à  $T=10$  minutes avec un écart-type  $\sigma$  égal à 0.5 degré.

La trajectoire optimale de l'observateur et le cap correspondant sont tracés figures 1 et 2. La trajectoire optimale est approximativement formée de trois "jambes" de même durée, le cap des jambes 1 et 3 étant tel que l'émetteur est sur le travers et le défilement en azimut  $d\beta/dt$  maximum.

La valeur du critère  $Q$  est tracée figure 3 en fonction du nombre d'itérations de l'algorithme (initialisé par une trajectoire initiale formée de deux jambes de même durée, 5 minutes, et de caps respectifs 0 et 270 degrés). La convergence est très rapide pendant les trois ou quatre premières itérations, beaucoup plus lente ensuite (en tout 24 itérations sont nécessaires). Après convergence de l'algorithme,  $|F(T)|^{1/2}$  et  $\sigma_r(T)$  (écart-type d'estimation de la distance) sont respectivement égaux à  $1.866 \text{ m}^4 \cdot \text{s}^2$  et 176.64 mètres.

Les figures 4a-d illustrent l'influence de la distance initiale  $r_0$  sur la trajectoire optimale. Globalement, la trajectoire optimale est le résultat d'un compromis entre deux exigences contradictoires :

- se rapprocher de l'émetteur de manière à augmenter la matrice de Fisher  $F(T)$  en gagnant sur les termes en  $r^{-1}(t_i)$  de l'équation (9),

- garder la source sur le travers de manière à maximiser le défilement de l'azimut  $d\beta/dt$  et l'ouverture de la base de triangulation générée par la manœuvre de l'observateur.

Lorsque l'émetteur est à faible distance ( $r_0 = 5\text{km}$ , figure 4a), la trajectoire optimale, toujours formée de trois jambes est orientée vers l'émetteur. Au contraire, lorsque l'émetteur est à grande distance ( $r_0 = 50\text{km}$ , figure 4d), il n'y a rien à gagner à réduire la distance et l'observateur garde toujours l'émetteur sur le travers.

Cette propriété des trajectoires optimales avait déjà été remarquée [5], mais dans un cas plus simple, celui de la localisation d'un émetteur fixe.

Pour conclure, nous présentons figure 5, la trajectoire optimale, toujours obtenue par le même algorithme, lorsque plutôt que le critère (11), on cherche à minimiser l'écart-type  $\sigma_r(T)$  de l'erreur d'estimation sur la distance à l'instant final. La trajectoire optimale est alors formée de deux jambes seulement (et non pas trois comme précédemment). Dans ce cas  $\sigma_r(T)$  et  $|F(T)|^{1/2}$  sont respectivement égaux à 131.15 mètres et  $2.786 \text{ m}^4 \cdot \text{s}^2$ .

### CONCLUSIONS

Nous avons proposé une méthode générale, basée sur la théorie du contrôle optimal, pour déterminer la trajectoire optimale de l'observateur en Trajectographie Passive. Une application intéressante de cette méthode serait de valider des stratégies de manœuvres simples, proches de l'optimalité, utilisables en temps réel pour résoudre le vrai problème : celui du choix de la manœuvre en présence d'un émetteur dont la trajectoire est inconnue ou connue partiellement.



## REFERENCES

- [1] S.C.NARDONE, A.G. LINDGREN, K.F. GONG "Fundamental properties of conventional bearing-only target motion analysis", IEEE trans on Automatic Control, Vol AC-29, N°9, Sept 1984
- [2] S.C. NARDONE, V.J. AIDALA "Observability criteria for bearing-only tracking", IEEE trans on AES, Vol 17, No 2, July 1981
- [3] J.A. FAWCETT "Effect of course maneuver on bearings only range estimation", IEEE trans on ASSP, Vol 36, No 8, Aug 1988
- [4] G. JAUFFRET, C. MUSSO "New results in Target Motion Analysis" Proc of UDT Conf, Paris, April 1991
- [5] S.E. HAMMEL, P.T. LIU, E.J. HILLIARD and K.F. GONG "Optimal observer motion for localization with bearing measurement", Computer and Mathematics with Applications, Vol 18, 1989
- [6] G.J. OLSDER "On the optimal maneuvering during bearings-only tracking", Proc of 23 rd Conf on Decision and Control, Las Vegas, 1984
- [7] J.M. PASSERIEUX et D. VAN CAPPEL "Optimal maneuver for bearings-only tracking", Soumis à IEEE trans on AES, Oct 1990
- [8] J.H. TAYLOR "The Cramer-Rao lower bound computation for deterministic non linear systems" IEEE trans on Automatic Control, Vol AC-24, No 2, April 1979
- [9] A.E. BRYSON and Y.C. HO "Applied optimal control", Hemisphere Publishing, Washington, 1975.
- [10] L. PONTRYAGUINE et al, "Théorie mathématique des processus optimaux", MIR, Paris, 1974

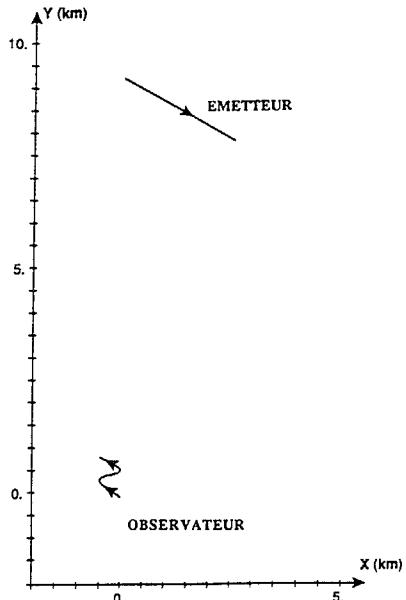
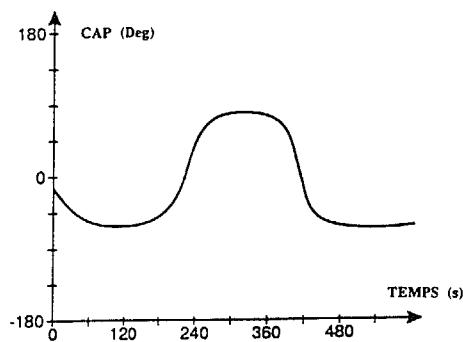
FIGURE 1 - TRAJECTOIRE OPTIMALE ( $Q = -\log|F(t)|$ )

FIGURE 2 - CAP OPTIMAL

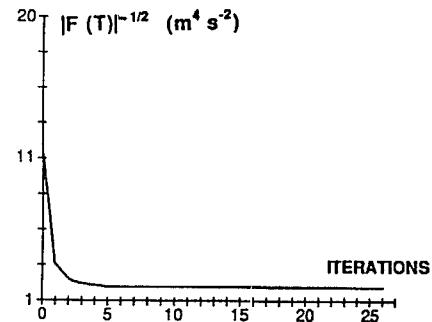


FIGURE 3 - CONVERGENCE DE L'ALGORITHME

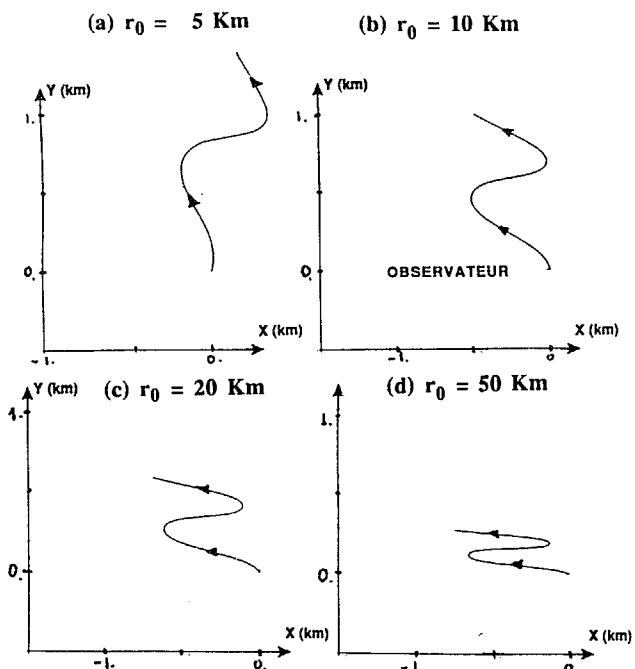
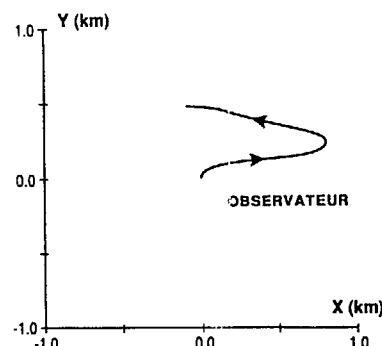


FIGURE 4 - INFLUENCE DE LA DISTANCE INITIALE

FIGURE 5 - TRAJECTOIRE OPTIMALE ( $Q = \alpha_r(T)$ )