



**UNE METHODE RAPIDE ET EFFICACE POUR LA  
TRAJECTOGRAPHIE PASSIVE PAR MESURES DE DEUX AZIMUTS**

PHAM Dinh Tuan<sup>(1)</sup> et MUSSO Christian<sup>(2)</sup>

<sup>(1)</sup>Laboratoire de Modélisation et Calcul, C.N.R.S., Université de Grenoble, B.P. 53x, 38041 Grenoble Cedex

<sup>(2)</sup>Société O.N.E.R.A., 29 Avenue de la Division Leclerc, 92320 Chatillon

**Résumé**

Une nouvelle méthode de trajectographie passive, avec deux mesures d'azimut à chaque instant, est proposée. Cette méthode généralise la méthode de trajectographie partielle *linéaire* introduite par le premier auteur. Elle nécessite très peu de calculs et est hautement efficace. Etant données deux suites d'azimuts observés, on estime, par des combinaisons linéaires adéquates, trois couples d'azimuts en trois instants judicieusement choisis. Ensuite, en combinant ces estimateurs, de façon la plus efficace possible, on détermine la trajectoire de la cible. Des simulations ont été effectuées, confirmant la bonne performance, prévue par la théorie, de cette méthode.

**1. INTRODUCTION**

La trajectographie passive par mesures d'azimut consiste à déterminer la trajectoire d'un bruiteur (cible) à l'aide des seules mesures d'azimut de celui-ci, mesures qui sont corrompues par des bruits, supposés additifs. On suppose que le bruiteur est animé d'un mouvement rectiligne uniforme. Dans ce cas, il est bien connu que sa trajectoire ne peut être complètement déterminée que si l'observateur fait une manœuvre ou si plusieurs azimuts sont mesurés simultanément. Nous nous intéressons à la deuxième situation, et nous considérons le cas où il y a deux mesures d'azimuts à chaque instant, fournis par deux capteurs solidaires, animés d'un mouvement rectiligne uniforme.

Les méthodes conventionnelles en trajectographie peuvent être groupées en deux classes différentes: les méthodes récursives, basées sur la technique de filtrage de Kalman, et les méthodes globales (traitement par lot). Les premières méthodes sont assez simples à implanter et nécessitent peu de calculs. Toutefois, comme le problème est intrinsèquement non linéaire, on doit remplacer le filtre de Kalman classique par un filtre étendu, essentiellement une version linéarisée de celui-ci, qui peut parfois diverger ([1], [2]). D'autre part ces méthodes ne fournissent pas des estimateurs aussi performants que les méthodes globales. La méthode du maximum de vraisemblance (c'est-à-dire moindres carrés dans le cas gaussien), par exemple, permet de construire des estimateurs dont la matrice de covariance atteint asymptotiquement la borne inférieure de Cramer-Rao (l'estimateur est asymptotiquement le plus efficace). Mais cette méthode est très coûteuse sur le plan du calcul, car on doit résoudre un problème de minimisation non linéaire, ce qui

**Abstract**

A new bearing-only target's estimation method, with two bearing measurements at each time points, is proposed. This method generalises the *linear* partial target estimation introduced earlier by the first author. It requires very few computations and is highly efficient. Given two sequences of observed bearings, one estimates, through suitable linear combinations, three pairs of bearings at three judiciously chosen times. Then, by combining these estimates, in the most efficient way, one determines the target's trajectory. Simulations have been carried out, confirming the good performance of this method, as predicted by the theory.

nécessite un calcul itératif (de plus, la convergence de l'itération n'est pas assurée).

Dans cet article, nous proposons une nouvelle méthode globale pour le problème ci-dessus, qui est non itérative, donc très rapide en temps de calcul, et qui est hautement efficace dans le sens que la matrice de covariance de l'estimateur est approximativement égale à la borne inférieure de Cramer-Rao. La seule condition requise est que la distance inter-capteurs ainsi que le déplacement total relatif de la cible pendant toute la durée de l'observation soient faibles par rapport à la distance cible-capteur.

**2. NOTATIONS ET FORMULATION DU PROBLEME**

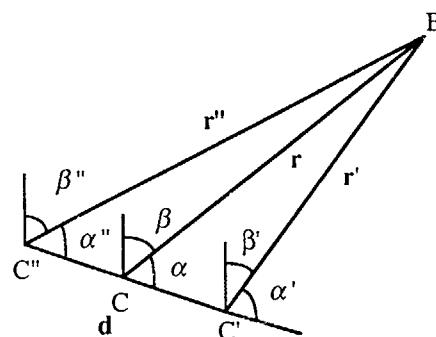


Figure 1: Disposition géométrique des capteurs et du bruiteur

On dispose de deux capteurs solidaires se déplaçant de façon rectiligne uniforme, qui mesurent les azimuts d'un bruiteur (cible), lui même animé d'un mouvement rectiligne uniforme. On



note  $C'$ ,  $C''$  et  $B$  les positions des capteurs et du bruiteur (voir fig. 1) et  $\mathbf{r}'$ ,  $\mathbf{r}''$ , les positions relatives du bruiteur aux capteurs. Par commodité, ces vecteurs (dans le plan) sont représentés par des nombres complexes. On les indexe par  $t$  pour indiquer leur dépendance au temps  $t$ . Les azimuts observés suivent donc le modèle:

$$(1) \quad \begin{aligned} z_t' &= \beta_t + e_t', \quad \beta_t = \pi/2 - \arg(\mathbf{r}_t'), \\ z_t'' &= \beta_t'' + e_t'', \quad \beta_t'' = \pi/2 - \arg(\mathbf{r}_t''), \end{aligned}$$

où  $e_t'$  et  $e_t''$  sont des variables aléatoires indépendantes de loi normale centrée de variance  $\sigma'^2$  et  $\sigma''^2$  respectivement. Le problème est d'estimer le trajectoire du bruiteur à partir des ces azimuts observés.

## 2 . METHODE D'ESTIMATION

Pour simplifier, on suppose (dans un premier temps) que  $\sigma' = \sigma'' = \sigma$ . On note  $C$  le point au milieu de segment joignant  $C''$  et  $C'$ , et  $\mathbf{r}_t$  la position du bruiteur relative à  $C$ . Donc  $\mathbf{r}_t' = \mathbf{r}_t - \mathbf{d}/2$ ,  $\mathbf{r}_t'' = \mathbf{r}_t + \mathbf{d}/2$ , où  $\mathbf{d}$  désigne le nombre complexe représentant le vecteur d'origine  $C''$  et d'extrémité  $C'$ .

On s'intéresse à la situation où  $|\mathbf{d}/\mathbf{r}_t|$  est *petit devant 1*. On peut alors effectuer un développement limité de  $\beta_t' = \pi/2 - \text{Im}(\ln \mathbf{r}_t')$  et  $\beta_t'' = \pi/2 - \text{Im}(\ln \mathbf{r}_t'')$  autour du point  $\mathbf{r}_t$  ( $\text{Im}$  désigne la partie imaginaire). On a:

$$\beta_t' = \pi/2 - \text{Im}[\ln \mathbf{r}_t - (\mathbf{d}/\mathbf{r}_t) - (\mathbf{d}/\mathbf{r}_t)^2/2 + O(|\mathbf{d}/\mathbf{r}_t|^3)],$$

$$\beta_t'' = \pi/2 - \text{Im}[\ln \mathbf{r}_t + (\mathbf{d}/\mathbf{r}_t) - (\mathbf{d}/\mathbf{r}_t)^2/2 + O(|\mathbf{d}/\mathbf{r}_t|^3)],$$

où  $O(|\mathbf{d}/\mathbf{r}_t|^k)$  désigne un terme tel que  $O(|\mathbf{d}/\mathbf{r}_t|^k)/|\mathbf{d}/\mathbf{r}_t|^k$  reste borné quand  $|\mathbf{d}/\mathbf{r}_t|$  tend vers 0. Par suite

$$(2) \quad (\beta_t' + \beta_t'')/2 = \beta_t + O(|\mathbf{d}/\mathbf{r}_t|^2),$$

$$(3) \quad \beta_t' - \beta_t'' = \text{Im}(\mathbf{d}/\mathbf{r}_t) + O(|\mathbf{d}/\mathbf{r}_t|^3) = |\mathbf{d}/\mathbf{r}_t| \sin \alpha_t + O(|\mathbf{d}/\mathbf{r}_t|^3),$$

où  $\alpha_t = \arg(\mathbf{d}/\mathbf{r}_t)$ , de sorte que  $\alpha_t - \beta_t$  est une constante (c'est l'angle du vecteur  $\mathbf{d}$  avec le nord).

Avec l'approximation précédente, le modèle (1) devient

$$(4) \quad (z_t' + z_t'')/2 = \beta_t + \varepsilon_t, \quad z_t' - z_t'' = |\mathbf{d}/\mathbf{r}_t| \sin \alpha_t + \eta_t,$$

où  $\varepsilon_t$  et  $\eta_t$  sont encore des variables aléatoires normales *indépendantes* centrées de variance  $\sigma^2/2$  et  $2\sigma^2$  respectivement. D'autre part, on peut paramétriser la trajectoire  $\mathbf{r}_t$  par  $\theta = (\beta_{t_0}, \beta_{t_1}, \beta_{t_2})'$  et  $u = |\mathbf{d}/\mathbf{r}_{t_0}|$ ,  $t_0, t_1, t_2$  étant des instants distincts. Il est clair que  $\beta_t$  et  $w_t = |\mathbf{r}_{t_0}/\mathbf{r}_t| \sin \alpha_t$  ne dépend que de  $\theta$ . On écrit  $\beta_t(\theta)$  et  $w_t(\theta)$  pour indiquer cette dépendance. La méthode de maximum de vraisemblance conduit à minimiser

$$2 \sum_{t=1}^n [(z_t' + z_t'')/2 - \beta_t(\theta)]^2 + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n [z_t' - z_t'' - w_t(\theta)u]^2.$$

Pour  $\theta$  fixé, la minimisation du critère précédent conduit à

$$(5) \quad \hat{u}(\theta) = [\sum_{t=1}^n (z_t' - z_t'')w_t(\theta)] / [\sum_{t=1}^n w_t^2(\theta)]$$

et on doit alors minimiser

$$2 \sum_{t=1}^n [(z_t' + z_t'')/2 - \beta_t(\theta)]^2 + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n [z_t' - z_t'' - \hat{w}_t(\theta)u]^2.$$

La dernière somme est une fonction complexe de  $\theta$ , mais comme  $\hat{u}(\theta)$  est petit devant 1, ainsi que  $z_t' - z_t''$  (car celui ci a pour moyenne  $w_t u$ ), on va l'ignorer en minimisant seulement la première somme. Cela revient à faire un trajectographie partielle où on estime la trajectoire du bruiteur à une constante multiplicative près à l'aide des  $(z_t' + z_t'')/2$ . On estime alors  $u$  en remplaçant dans (5),  $\theta$  par son estimateur obtenu auparavant.

Comme dans [3], on remplace  $w_t$  par son interpolation basé sur les trois points  $t_0, t_1, t_2$  de la quadrature de Gauss. On écrit donc  $w_t = \sum_{i=0}^2 \phi_i(t)w_{t_i}$  où  $\phi_0, \phi_1, \phi_2$  sont les polynômes d'interpolation de Lagrange basés sur  $t_0, t_1, t_2$ . La formule (5) devient

$$(6) \quad \hat{u}(\theta) = [\sum_{i=0}^2 (\hat{\beta}_{t_i} - \hat{\beta}_{t_i}'')w_{t_i}(\theta)\|\phi_i\|^2] / [\sum_{i=0}^2 w_{t_i}^2(\theta)\|\phi_i\|^2]$$

où

$$\hat{\beta}_{t_i}' = \|\phi_i\|^{-2} \sum_{t=1}^n z_t' \phi_i(t), \quad \hat{\beta}_{t_i}'' = \|\phi_i\|^{-2} \sum_{t=1}^n z_t'' \phi_i(t)$$

sont les *estimateurs linéaires* de  $\beta_{t_i}', \beta_{t_i}''$  basés sur les deux capteurs séparément [3].

On peut justifier l'estimateur (6) à posteriori comme suit. En adoptant le modèle approché (4), la variable définie par le second membre de (5) a pour moyenne  $u$  et variance  $2\sigma^2/(\sum_{t=1}^n w_t^2)$ .

Or, En ignorant le biais de  $\hat{\beta}_{t_i}'$  et  $\hat{\beta}_{t_i}''$ , la variable définie par le second membre de (6) a pour moyenne  $u$  et variance  $2\sigma^2/(\sum_{t=1}^n w_{t_i}^2 \|\phi_i\|^2)$ . Comme  $\sum_{t=1}^n w_{t_i}^2 \|\phi_i\|^2$  n'est d'autre que la formule de quadrature de Gauss pour la somme  $\sum_{t=1}^n w_t^2$ , ces deux variables aléatoires ont approximativement même moyenne et variance.

Un autre approche consiste à travailler directement sur les  $\hat{\beta}_{t_i}'$  et  $\hat{\beta}_{t_i}''$  en les considérant comme des azimuts observés avec des erreurs *centrées* de variance  $2\sigma^2 \|\phi_i\|^2$ . Un calcul semblable au précédent conduit aussi à l'estimateur (6).

Le calcul précédent de la moyenne et de la variance ignore le fait que  $\theta$  est inconnu et donc doit être remplacé par son estimateur  $\hat{\theta}$ . Mais ce remplacement ne modifie pas beaucoup le comportement des estimateurs (5) et (6). En effet, notant  $\hat{w}_t =$

$w_t(\hat{\theta})$ , l'estimateur (5) s'écrit

$$(7) \quad [(\sum_{t=1}^n \hat{w}_t w_t) / (\sum_{t=1}^n \hat{w}_t^2)] u + (\sum_{t=1}^n \hat{w}_t \eta_t) / (\sum_{t=1}^n \hat{w}_t^2)$$

Le dernier terme de l'expression précédente diffère de  $(\sum_{t=1}^n w_t \eta_t) / (\sum_{t=1}^n w_t^2)$ , qui a pour variance  $2\sigma^2 / (\sum_{t=1}^n w_t^2)$ , par un terme approximativement égale à  $(\sum_{t=1}^n \eta_t \delta_t)(\hat{\theta} - \theta)$  où  $\delta_t = \partial[\hat{w}_t^2 / (\sum_{s=1}^n \hat{w}_s^2)] / \partial \theta$ . La variable aléatoire  $\sum_{t=1}^n \eta_t \delta_t$  a une variance de même ordre de grandeur que celle de  $\sum_{t=1}^n w_t \eta_t$ , mais comme elle est multipliée par  $\hat{\theta} - \theta$  qui est petit, le résultat peut être négligé. D'autre part, le premier terme de (7) peut s'écrire  $u - [(\sum_{t=1}^n \hat{w}_t (\hat{w}_t - w_t)) / (\sum_{t=1}^n \hat{w}_t^2)] u$ , mais comme le dernier terme de cette expression contient le facteur  $u$ , qui est petit devant 1, il peut être encore négligé devant la variable  $(\sum_{t=1}^n w_t \eta_t) / (\sum_{t=1}^n w_t^2)$ . Donc finalement (7) se comporte comme une variable de moyenne  $u$  et variance  $2\sigma^2 / (\sum_{t=1}^n w_t^2)$ . Le même argument s'applique à l'estimateur (6).

Dans le cas où les bruits sur les capteurs n'ont pas la même variance, les variables  $(z_t' + z_t'')/2$  et  $z_t' - z_t''$  ne sont plus indépendantes. Il convient donc de travailler avec le couple  $(\sigma'^2 z_t'' + \sigma''^2 z_t') / (\sigma'^2 + \sigma''^2)$  et  $z_t' - z_t''$ . On définit maintenant C comme le point divisant le segment joignant C'' et C' en deux segments, de longueur proportionnel à  $\sigma'^2$  (celui joignant C') et  $\sigma''^2$  (celui joignant C''). En notant encore  $\mathbf{r}_t$  la position du bruiteur relative au point C, on a  $\mathbf{r}'_t = \mathbf{r}_t - \mathbf{d}'$ ,  $\mathbf{r}''_t = \mathbf{r}_t - \mathbf{d}''$ , avec  $\mathbf{d}' - \mathbf{d}'' = \mathbf{d}$  et  $\sigma'^2 \mathbf{d}'' + \sigma''^2 \mathbf{d}' = 0$ . Comme précédemment

$$\beta_t' = \pi/2 - \text{Im}[\ln \mathbf{r}_t - (\mathbf{d}'/\mathbf{r}_t) - (\mathbf{d}'/\mathbf{r}_t)^2/2 + O(|\mathbf{d}'/\mathbf{r}_t|^3)],$$

$$\beta_t'' = \pi/2 - \text{Im}[\ln \mathbf{r}_t - (\mathbf{d}''/\mathbf{r}_t) - (\mathbf{d}''/\mathbf{r}_t)^2/2 + O(|\mathbf{d}''/\mathbf{r}_t|^3)].$$

Par suite

$$(\sigma'^2 \beta_t'' + \sigma''^2 \beta_t') / (\sigma'^2 + \sigma''^2) = \beta_t + O(|\mathbf{d}/\mathbf{r}_t|^2),$$

$$\beta_t' - \beta_t'' = \text{Im}(\mathbf{d}/\mathbf{r}_t) + O(|\mathbf{d}/\mathbf{r}_t|^2) = |\mathbf{d}/\mathbf{r}_t| \sin \alpha_t + O(|\mathbf{d}/\mathbf{r}_t|^2).$$

Notons que l'erreur dans la dernière approximation est de l'ordre  $|\mathbf{d}/\mathbf{r}_t|^2$  et non  $|\mathbf{d}/\mathbf{r}_t|^3$  comme dans le cas où les bruits ont la même variance. A part cette différence, on peut suivre la même démarche qui aboutit au procédé suivant: estimer d'abord la trajectoire  $\mathbf{r}_t$  à une constante multiplicative près à partir de  $(\sigma'^2 z_t'' + \sigma''^2 z_t') / (\sigma'^2 + \sigma''^2)$ ,  $t = 1, \dots, n$ , puis estimer  $u$  par la formule (5) ou (6) avec  $\theta$  remplacé par son estimateur  $\hat{\theta}$  obtenu précédemment.

### 3 . AMELIORATION DE LA METHODE

#### 3.1 Utilisation des formules exactes

On va établir des relations exactes entre  $\beta_t'$ ,  $\beta_t''$ ,  $\beta_t$  et  $|\mathbf{d}/\mathbf{r}_t|$ , pour les utiliser à la place de (2) et (3). Pour simplifier, on se place dans le cas où les bruits ont la même variance. En outre, on supprime l'indice  $t$  et on travaille avec  $\alpha$ ,  $\alpha'$ ,  $\alpha''$  au lieu de  $\beta$ ,  $\beta'$ ,  $\beta''$ . Les angles  $\alpha$ ,  $\alpha'$ ,  $\alpha''$  sont pris dans  $[-\pi, \pi]$  et alors

ils ont tous le même signe ainsi que  $\alpha' - \alpha''$  (voir fig. 1). En traçant la droite partant de B et perpendiculaire à la droite joignant C'', C', on voit que

$$\cot \alpha = \frac{\cot \alpha' + \cot \alpha''}{2} = \frac{\sin(\alpha' + \alpha'')}{2(\sin \alpha' \sin \alpha'')}$$

Par suite

$$(8) \quad \sin \alpha = (\sin \alpha' \sin \alpha'')/A, \cos \alpha = \sin(\alpha' + \alpha'')/A$$

où  $A$  est tel que  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ , soit

$$A = \text{signe}(\alpha) \sqrt{[\sin^2(\alpha' + \alpha'')] / 4 + \sin^2 \alpha' \sin^2 \alpha''}.$$

On peut exprimer les relations précédentes à l'aide de  $\bar{\alpha} = (\alpha' + \alpha'')/2$  et  $\delta = (\alpha' - \alpha'')/2$ . On a  $\sin \alpha' \sin \alpha'' = \sin^2 \bar{\alpha} - \sin^2 \delta$ . Par suite  $A^2 = \sin^2 \bar{\alpha} - 2 \sin^2 \bar{\alpha} \sin^2 \delta + \sin^4 \delta = \sin^2 \bar{\alpha} (\cos^4 \delta - \sin^4 \delta) + \sin^4 \delta$ . Finalement

$$(8') \quad \sin \alpha = (\sin^2 \bar{\alpha} - \sin^2 \delta)/A, \cos \alpha = \cos \bar{\alpha} \sin \bar{\alpha}/A,$$

$$(9') \quad A = (\sin \bar{\alpha}) \sqrt{\cos^4 \delta + \sin^4 \delta \cot^2 \bar{\alpha}}.$$

D'autre part,

$$(10) \quad \frac{\sin(\alpha' - \alpha'')}{|\mathbf{d}|} = \frac{\sin \alpha''}{|\mathbf{r}'|} = \frac{\sin \alpha'' \sin \alpha}{\sin \alpha' |\mathbf{r}'|} = \frac{\sin \alpha'' \sin \alpha'}{|\mathbf{r}'| \sin \alpha'}$$

En utilisant (8) et (9'), on déduit que

$$|\mathbf{d}/\mathbf{r}| = \sin(\alpha' - \alpha'')/A = (2 \tan \delta / \sin \bar{\alpha}) / \sqrt{1 + \tan^4 \delta \cot^2 \bar{\alpha}}.$$

Par suite, quand  $|\mathbf{d}/\mathbf{r}|$  est petit,  $2 \tan \delta / \sin \bar{\alpha} \approx |\mathbf{d}/\mathbf{r}|$ .

Les formules (8) - (10) permettent de vérifier si les approximations introduites sont adéquates. Des calculs numériques montrent que l'approximation  $2 \tan \delta \approx |\mathbf{d}/\mathbf{r}| \sin \bar{\alpha}$  est excellente (donc peut être utilisée dans tous les cas) et l'approximation  $2\delta \approx |\mathbf{d}/\mathbf{r}| \sin \bar{\alpha}$  est encore acceptable jusqu'à  $|\mathbf{d}/\mathbf{r}| = 0.5$ . Par contre, l'approximation  $\alpha = \bar{\alpha}$  n'est adéquate que pour  $|\mathbf{d}/\mathbf{r}|$  assez petit ( $\leq 0.1$  par ex.). Si ce n'est pas le cas, il est préférable de se servir de (8), (9) ou (8'), (9') pour évaluer  $\beta_t$  en fonction de  $\beta_t'$  et  $\beta_t''$ . Ainsi, on obtient des estimateurs  $\hat{\beta}_{t,i}'$ ,  $\hat{\beta}_{t,i}''$  de  $\beta_{t,i}$  à partir des estimateurs linéaires  $\hat{\beta}_{t,i}', \hat{\beta}_{t,i}''$  de  $\beta_{t,i}$ ,  $i = 0, 1, 2$ . Ceci permet d'estimer le trajectoire  $\mathbf{r}_t$  à une constante multiplicative près. Maintenant, avec une excellente approximation,

$$2 \tan \hat{\delta}_{t,i} \approx w_{t,i} u + 2(\hat{\delta}_{t,i}' - \hat{\delta}_{t,i}'') / \cos^2 \hat{\delta}_{t,i}$$

où  $\hat{\delta}_{t,i} = (\hat{\beta}_{t,i}' - \hat{\beta}_{t,i}'')/2$  et  $w_{t,i} = |\mathbf{r}_{t,i}| \sin \bar{\alpha}_{t,i}$ . Les mêmes arguments que précédemment conduisent alors à estimer  $u$  par

$$(11) \quad [\sum_{i=0}^2 2\hat{w}_{t,i} \|\phi_i\|^2 \cos^4 \hat{\delta}_{t,i} \tan \hat{\delta}_{t,i}] / [\sum_{i=0}^2 \hat{w}_{t,i}^2 \|\phi_i\|^2 \cos^4 \hat{\delta}_{t,i}]$$



où  $\hat{w}_{t_i}$  est l'estimateur de  $w_{t_i}$  obtenu en remplaçant  $\beta_{t_i}^{'}, \beta_{t_i}^{''}$  par  $\hat{\beta}_{t_i}^{'}, \hat{\beta}_{t_i}^{''}$ , et  $|\mathbf{r}_{t_0}/\mathbf{r}_{t_i}|$  par l'estimation, déjà faite à une constante multiplicative près, de  $\mathbf{r}_{t_i}$ .

### 3.2 Amélioration de l'estimation des rapports $|\mathbf{r}_{t_0}/\mathbf{r}_{t_i}|$

Ces rapports sont mal estimés quand  $\beta_{t_2} \approx \beta_{t_1}$ . Or, approximativement,  $|\mathbf{r}_{t_0}/\mathbf{r}_{t_i}| = u_i = u$  si  $i = 0$ ,  $= u(1 + v)$  si  $i = 1$ ,  $= u(1 - v)$  si  $i = 2$ , où  $2v$  représente le déplacement radial relatif du bruiteur entre  $t_1$  et  $t_2$ . La moyenne de  $2 \operatorname{tg} \hat{\delta}_{t_i}$  varie donc approximativement linéairement avec  $v$  (pour  $u$  et  $\bar{\alpha}_{t_i}$  fixés). En remplaçant  $u$  par un estimateur préliminaire  $\hat{u}$ , décrit plus loin, et  $\bar{\alpha}_{t_i}$  par son estimateur  $\hat{\bar{\alpha}}_{t_i}$ , obtenu en remplaçant  $\beta_{t_i}^{'}, \beta_{t_i}^{''}$  dans l'expression de  $\bar{\alpha}_{t_i}$  par leur estimateurs, la méthode de régression conduit à l'estimation suivante de  $v$ :

$$(12) \quad [\hat{m}_1 (2 \operatorname{tg} \hat{\delta}_{t_1} - \hat{u} \sin \hat{\bar{\alpha}}_{t_1}) \sin \hat{\bar{\alpha}}_{t_1} - \\ \hat{m}_2 (2 \operatorname{tg} \hat{\delta}_{t_2} - \hat{u} \sin \hat{\bar{\alpha}}_{t_2}) \sin \hat{\bar{\alpha}}_{t_2}] / [\hat{u}(\hat{w}_1 + \hat{w}_2)],$$

où  $\hat{m}_i = \|\phi_i\|^2 \cos^4 \hat{\delta}_{t_i}$  et  $\hat{w}_i = \hat{m}_i \sin^2 \hat{\bar{\alpha}}_{t_i}$ . On dispose d'autre part un autre estimateur de  $v$ , à savoir  $-\hat{\beta}/\hat{\beta}$  où  $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_{t_2} - \hat{\beta}_{t_1})/2$ ,  $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_{t_2} + \hat{\beta}_{t_1})/2 - \hat{\beta}_{t_0}$ . En les combinant selon leur variances respectives, soient approximativement  $2\sigma^2/[(\omega_1 + \omega_2)u^2]$  et  $\sigma^2 n/(4\|\phi_0\|^2 \|\phi_1\|^2 \hat{\beta}^2)$ , on obtient l'estimateur:

$$\hat{v} = \frac{\hat{u}N - (8\|\phi_0\|^2 \|\phi_1\|^2/n)\hat{\beta}\hat{\beta}}{\hat{u}^2(\hat{w}_1 + \hat{w}_2) + (8\|\phi_0\|^2 \|\phi_1\|^2/n)\hat{\beta}^2}$$

où  $N$  est le numérateur de (12). On peut alors réestimer  $\hat{\beta}$  par  $\hat{\beta} \hat{v}$ . On ne change ni  $\hat{\beta}$  ni  $(\sum_{i=0}^2 \|\phi_i\|^2 \hat{\beta}_{t_i})/n$  (car cette dernière statistique est non corrélée avec  $\hat{\beta}$  et  $\hat{\beta}$ ), on obtient alors de nouvelles estimations de  $\beta_{t_i}$ , qui permettent d'obtenir des estimations améliorées des rapports  $|\mathbf{r}_{t_0}/\mathbf{r}_{t_i}|$ . Alternativement, ces rapports peuvent être estimés par  $1 + \hat{v}$  et  $1 - \hat{v}$ . On peut ensuite réestimer  $u$  selon (11).

Comme estimateur préliminaire de  $u$ , on peut se servir du fait que la moyenne de  $2 \operatorname{tg} \hat{\delta}_{t_i}$  est linéaire en  $u$  et  $v$ . La méthode de régression conduit alors à estimer  $u$  par

$$\hat{u} = \frac{2[\hat{m}_0 \sin \hat{\bar{\alpha}}_{t_0} \operatorname{tg} \hat{\delta}_{t_0} + \sum_{i=1}^2 \frac{2\hat{w}_{3-i}}{\hat{w}_1 + \hat{w}_2} \hat{m}_i \sin \hat{\bar{\alpha}}_{t_i} \operatorname{tg} \hat{\delta}_{t_i}]}{\hat{w}_0 + \hat{w}_1 + \hat{w}_2 - (\hat{w}_1 - \hat{w}_2)^2/(\hat{w}_1 + \hat{w}_2)}$$

Une autre façon de procéder est de faire comme si  $v = 0$ , ce qui conduit à l'estimateur (biaisé) de  $u$ :

$$2(\sum_{i=0}^2 \hat{m}_i \sin \hat{\bar{\alpha}}_{t_i} \operatorname{tg} \hat{\delta}_{t_i})/(\sum_{i=0}^2 \hat{w}_i).$$

## 4. QUELQUES RESULTATS DE SIMULATION

Le tableau ci-dessous donne les résultats de simulations avec 100 répétitions pour chaque géométrie, définie par le cap du bruiteur, l'orientation des capteurs et le déplacement total  $L$  du bruiteur. L'écart type  $\sigma$  du bruit est de  $1^\circ$ , les capteurs sont fixes, séparés de 500 m et l'azimut et la distance capteur-bruiteur en  $t_0$  sont respectivement  $0^\circ$  et 20 km. Le nombre de mesures est 300 avec une mesure par seconde.

L	Cap Br	Orientation des Capteurs					
		0°	45°	90°	135°	15	32
3 km	0° inobservable	.004	.70	.010	.70	.010	.70
	> 50	> 50	> 50	> 50	> 50	> 50	> 50
	45°	.008	1.00	.004	.98	.009	.96
					.010	.98	
	15	.50	.9	1.00	.5	1.00	.1
	32	.20	.8	1.00	.4	1.00	.9
	135°	.008	1.00	.004	.98	.008	.96
					.010	.98	
	> 50	.00	.1	1.00	.5	1.00	.1
	0° inobservable	.004	.7	.009	.70	.010	.70
	> 50	> 50	> 50	> 50	> 50	> 50	> 50
	45°	.008	.98	.003	.98	.008	.98
					.010	.98	
12 km	> 50	.50	.05	1.00	.02	1.00	.08
	90°	.008	1.00	.004	1.00	.009	1.00
					.010	.98	
	2.8	.70	.06	1.00	.4	1.00	.1
	135°	.009	.98	.005	.98	.009	.98
					.010	.98	
	5.7	.50	.08	1.00	.03	1.00	.09

La première colonne du tableau représente le biais de l'azimut central (en degré) et celui de la distance (en km) en  $t_0$ . La deuxième donne l'efficacité de ces estimateurs, relative à la borne Cramer-Rao. La méthode utilisée est celle basée sur les formules exactes (8) - (11), mais sans d'autres améliorations. On voit que l'efficacité de l'estimateur est très proche de 1, sauf quand le cap du bruiteur et l'orientation des capteurs sont dans la ligne de visée. L'amélioration décrite ci-dessus peut être utile dans ces cas, mais nous n'avons pas encore la tester.

**Remerciements:** Ce travail a été fait en collaboration avec le GERDSM (DCAN Toulon) et la société RSCI.

## REFERENCES

- [1] ADAILA, V.J. Kalman filter behaviour in bearing-only tracking applications. *IEEE Trans. AES-15*, 1882, 29-39.
- [2] NARDONE, S.C., LINDGREN, A.G., GONG, K.F. Fundamental properties and performance of conventional bearing-only target motion analysis. *IEEE Trans. AC-29*, 1984, 775-787.
- [3] PHAM, D.T. Some simple and efficient methods for bearing-only target estimation. In *Signal Processing V*, Proceedings of EUSIPCO 90, L.Tores, E. MasGrau and M. A. Lagunas eds., 1990, 1899-1902.