

DU SIGNAL MUSICAL AU CHAOS.

Vincent GIBIAT

Laboratoire ONDES et ACOUSTIQUE,
E.S.P.C.I.10 rue VAUQUELIN
75005 PARIS

Résumé: *Le signal acoustique produit par des instruments à sons entretenus, instruments à vent et à cordes frottées, cache sous une apparence simplicité, périodicité et stabilité, des aspects peu connus, quoique fort utilisés. Le son produit par ces instruments peut en effet, dans des conditions de jeu variées, présenter un caractère non périodique voire apparemment aléatoire. Lors de l'analyse de ces signaux, à l'aide de méthodes classiques, spectrales ou mixtes, on fait apparaître des caractéristiques qui sont celles que l'on rencontre également dans les systèmes dynamiques non linéaires. Le rapport entre ces systèmes et les instruments à sons entretenus a largement été étudié. Nous montrerons comment à partir d'exemples simples, empruntés aux instruments à vent et à cordes, on peut en utilisant les méthodes de représentation et donc de traitement du signal propres à l'étude du chaos déterministe, extraire des informations pertinentes sur la physique de ces systèmes. Ces techniques, espaces de phase sections de Poincaré et dimensions associées, seront discutées et, dans le cas des objets sonores qui nous occupent, nous montrerons quelles limites il faut attendre de leur utilisation.*

Abstract: When produced by self sustained instruments such as woodwinds or bowed strings, acoustical signals show under an obvious simplicity, (periodicity and stability), some uncommon features not so well known. The sound produced by these instruments can present non periodic behaviour and sometimes what looks like random. When analyse, with classical tools, these signals have characteristics that are those often encountered in the field of non linear dynamical systems. The link between these kind of physical systems and self sustained musical instruments has been well explained. We show on some simple examples that using the particular (and ancient) tools of the physics of deterministic chaos which are nothing but a kind of signal analysis, we can extract informations of interest about the physics of these instruments. These methods, phase space representations, poincaré sections and associated dimensions, are discussed and in the fields of sound objects, we shall try to understand where are their bounds.



Introduction.

Le signal musical a longtemps été, du moins en acoustique, un sujet d'étude privilégié. Ses caractéristiques évidentes, longue partie périodique, transitoires courts mais porteurs d'information, ont conduit les spécialistes de l'acoustique musicale à une utilisation extensive de l'arsenal mis à leur disposition par les spécialistes du traitement du signal; de l'analyse spectrale la plus simple aux représentations temps fréquences les plus diverses. Une meilleure compréhension du fonctionnement des instruments à sons entretenus (cordes frottées et vents) liée entre autres à l'article de Mc. Intyre et al. [1], et les problèmes rencontrés dans l'analyse de signaux particuliers répertoriés sous le nom générique de "sons multiphoniques", ont conduits à un mode d'appréhension et donc d'analyse du signal différent. L'article de Mc. Intyre et al. est dans ce sens le premier à montrer clairement l'importance de la partie non linéaire responsable de l'auto-oscillation des instruments, et à établir un lien formel avec la physique des systèmes dynamiques non linéaires (SDNL). L'analyse développée bien que proche de l'analyse phénoménologique prévoit en particulier qu'un instrument de type clarinette devrait pouvoir produire un scénario du type doublements de périodes et donc aboutir au chaos. Après ce jalon important, deux articles [2,3] ont permis de vérifier expérimentalement cette assertion et cet éclairage nouveau a permis d'envisager l'analyse des sons multiphoniques évoqués plus haut [3] d'une manière différente liée aux SDNL. Dans une première partie nous

reprendrons les résultats de notre réalisation [3] de l'expérience de Maganza et al. [2] pour montrer l'importance des modes d'analyses et des représentations temporelles utilisées dans le cadre des SDNL et l'usage conjoint qui peut être fait de techniques fréquentielles. Dans une seconde partie, nous décrirons ces méthodes et les informations que l'on peut en extraire de façon simple. Ensuite nous envisagerons des signaux plus naturellement expérimentaux, dans le sens où le contrôle de leur production n'est pas directement maîtrisable. Dans ce cas nous verrons qu'il est encore plus important de maîtriser l'analyse temporelle pour pouvoir caractériser le degré de chaos atteint à l'aide des nombreuses techniques envisageables. Ceci enfin nous conduira naturellement à détailler certaines de ces techniques et à nous interroger sur leur pertinence (voire impertinence) sur des signaux réels.

I) Auto-oscillations et bifurcations dans un tuyau sonore.

Le modèle le plus simple d'un instrument de musique à sons entretenus est constitué d'une partie linéaire, décrite simplement dans le domaine fréquentiel par des grandeurs comme l'impédance d'entrée où le coefficient de réflexion et dans le domaine temporel par des grandeurs qui se déduisent des précédentes par transformation de Fourier, soit réponse impulsionale ou fonction de réflexion, et d'une partie non linéaire fortement localisée caractérisée par une fonction non linéaire qui couple deux grandeurs comme pression et vitesse acoustique ou bien force et vitesse. On peut donc

décrire ces systèmes auto-oscillants par un système non linéaire simple de deux équations, par exemple pour un tuyau sonore;

$$p(t) = G(t) * u(t) \quad (1)$$

$$u(t) = F(-p(t)) \quad (2)$$

où pour un instrument à anche la fonction non linéaire F se modélise bien par une fonction quadratique du type $F(x) = \lambda x(x - 1)$ susceptible d'engendrer un scénario de doublements de périodes. Les simulations numériques d'un tel système [4] montrent en effet que par variation de λ on obtient bien oscillation à une fréquence proche d'un maximum du module de la transformée de Fourier de $G(t)$, puis une série de doublements de périodes jusqu'au chaos. Ce résultat classique a été confirmé expérimentalement avec un dispositif similaire à celui décrit figure 1. L'intérêt de cette réalisation est que la simplification introduite dans le système est limitée à la fonction non linéaire. Le reste du système reste un résonateur d'instrument à vent. On peut ainsi engendrer de nombreux scénarios d'auto-oscillations en jouant et contrôlant la fonction non linéaire et en utilisant comme paramètre de contrôle le gain de l'amplificateur. Si l'intérêt didactique est immédiat, la faiblesse qui en résulte tient principalement au fait que ce paramètre de contrôle est le plus souvent inaccessible ou mal défini dans nombre de situations expérimentales où le signal est le seul lien qui nous

relie à la réalité physique. En ne considérant que le premier aspect, la figure 2 fournit un certain nombre de représentations liées à une réalisation que nous avons faite de cette expérience. Si dans le cas des signaux périodiques et pour les premiers doublements de périodes, une simple analyse spectrale est amplement suffisante, il est parfois, comme dans le cas du troisième doublement de période, utile de disposer des outils que nous allons détailler.

II) Trajectoires de phases et sections de Poincaré.

La figure 2 fait un emploi extensif d'une représentation maintenant classique. Il s'agit de la trajectoire du système étudié reconstruite dans un espace supposé équivalent à l'espace des phases. Il s'agit en effet de reconstruire, à partir d'un signal émis par le système étudié, un objet dont les propriétés géométriques et topologiques soient proches de la trajectoire dans l'espace des phases cher aux mécaniciens et dont les axes sont les coordonnées et moments généralisés fort difficiles d'accès pour l'expérimentateur. En l'absence de cet espace bien défini théoriquement Takens [5] a proposé d'utiliser des reconstructions équivalentes au moins dans la plupart des cas physiques. La plus couramment employée est celle des espaces à temps décalés. Ces espaces construits avec comme axes des répliques retardées d'un signal mesuré, $f(t), f(t+\tau), f(t+2\tau), \dots, f(t+n\tau)$ ne sont utilisables que pour des espaces de dimensions réduites. La seconde avancée importante est alors celle de chaos à petit nombre de degrés de libér-



tés qui peut être mal résumée par la conjecture "trois implique chaos". L'idée fondamentale restant qu'un espace de dimension faible peut être suffisant pour représenter un phénomène complexe voire chaotique. En effet dans le cas des instruments à vent, la physique est celle de la mécanique des fluides. Le nombre de degrés de libertés est à priori infini et la dimension de l'espace des phases également. Or il est clair que lorsque le signal émis est périodique un espace de dimension deux est suffisant. Dans la plupart des cas des espaces de dimension trois se révèlent utilisables. Dans l'hypothèse où ce ne serait pas le cas, ou même pour des espaces de dimension trois qui peuvent se révéler peu lisibles, il est toujours possible de supprimer artificiellement une ou plusieurs dimensions de l'espace en n'étudiant plus celui ci mais son intersection avec le sous espace de dimension immédiatement inférieure (par exemple le plan pour l'espace à trois dimensions). On obtient ainsi la section de Poincaré de la trajectoire de phase. Cette opération de section peut d'ailleurs être réitérée de manière à ne conserver que la partie informative souhaitée. On se trouve alors devant des représentations du signal qui peuvent se résumer ainsi:

signal	Trajectoire de phase	Section de Poincaré
périodique	courbe fermée	point
n périodique	Tore T^n	Tore T^{n-1}
chaotique	attracteur "étrange" dimension non entière	attracteur "étrange" dimension non entière

où npériodique désigne un signal émis par un système à n oscillateurs couplés linéairement ou non. La dimension de l'attracteur étrange de la section de Poincaré d'un signal chaotique est non entière et égale à celle de la trajectoire diminuée de une unité. Pour plus de détails on pourra se reporter aux références [5] à [8].

La question qui se pose quand on est arrivé au chaos est alors de caractériser cette dimension. Nous verrons plus loin qu'il existe plusieurs solutions, mais une autre question se pose en parallèle. Quelle va être l'influence du délai τ choisi pour la reconstruction sur la qualité de la reconstruction, la section et la dimension? et y-a-t'il un moyen absolu de choisir ce délai?

La question de l'influence du délai et de son choix sont en fait liées. La figure 3 montre les trajectoire obtenues pour un même signal pour des délais différents. Si l'image est semblable pour des délais voisins on voit immédiatement que des délais trop courts "étranglent" la représentation sur une droite. De même des délais trop long peuvent supprimer toute cohérence à la représentation. Fraser [9] a proposé une méthode de détermination optimale de ce délai. On peut facilement vérifier que dans le cas de signaux bipériodiques ce critère est équivalent à celui qui consiste à prendre un quart de période d'une fréquence constitutive du signal.

III) Analyse de signaux naturels.

Les sons multiples ou multiphoniques aux instruments à vent sont produits par les musiciens depuis longtemps dans des cadres



divers. L'acoustique ne s'étant longtemps intéressée qu'aux signaux classiques et policiés il fallut attendre le travail de Castellengo [10] pour que le problème soit posé. Comment analyser et interpréter physiquement des signaux reproductibles non périodiques parfois extrêmement complexes d'un point de vue spectral et qui plus est perçus comme une superposition de sons périodiques. Les premières analyses révélaient en effet [11] la présence de nombreuses fréquences non harmoniques parfois superposées à un fond continu. Ce qui aujourd'hui apparaît clairement comme la signature d'une transition vers un chaos déterministe à petit nombre de degrés de liberté nous était alors apparu comme un casse tête. L'utilisation des trajectoires de phases et des sections de Poincaré permet sans autre outil de déterminer clairement qu'il s'agit dans la plus grande partie de ces signaux de signaux bipériodiques dont le spectre est constitué des composantes $mf_1 \pm nf_2$ où f_1, f_2 sont les deux fréquences de base facilement reliées à la physique du système (après identification) et m, n deux entiers positifs de faible rang. La figure 4 donne quelques exemples de cette situation. L'analyse des autres signaux est plus complexe. Leur comportement est plus proche des signaux chaotiques présentés au paragraphe 1 (c.f. figure 5). Il est alors difficile de parler de quasi-périodicité. D'autre part on sait qu'un route (contreversée) vers le chaos semble possible via la quasipériodicité [6] et que d'autres exemples montrent qu'il est également possible de rencontrer des systèmes quasipériodiques à 3 voire 4 fréquences de base [12-

13] (c.f. figure 6). Quand l'emploi de sections de Poincaré successives devient difficile voire impossible car nécessitant un nombre de données hors d'accès, on peut et on doit se tourner vers des méthodes de caractérisation plus quantitatives et chercher à caractériser le chaos par la dimension de l'attracteur reconstruit par exemple ou mieux par l'étude de la divergence des trajectoires sur ce même attracteur.

IV) Caractérisation des attracteurs de signaux acoustiques.

Une première façon simple d'étudier les signaux est fournie par la reconstruction d'une trajectoire dans l'espace des phases. Pour des signaux très simples cette représentation suffit. L'étude de la section de Poincaré permet l'accès aux signaux bipériodiques et également (figure 6) tripériodiques ou plus lorsque les conditions sont réunies. Cette technique est aussi la plus pertinente pour l'étude des accrochages où les fréquences sont dans des rapports entiers mais lorsque la complexité du signal croît elle n'apporte plus tous les renseignements souhaités. On utilise alors des méthodes de calcul de la dimension "fractale" de la trajectoire dans l'espace des phases. Cette dimension pour laquelle Procaccia et Grassberger [14] ont donné une méthode de calcul très utilisée pose quelques problèmes. Le plus courant est lié au grand nombre de points nécessaires pour obtenir un résultat fiable. Il est courant de trouver des dimensions non entières pour des courbes fermées. On rencontre aussi des calculs effectués sur des signaux non stationnaires



ou pour lesquels le paramètre de contrôle a évolué. Toutes sortes de choses qui peuvent largement biaiser la mesure. La figure 7a donne le résultat que nous avons obtenu pour un signal de saxophone non bipériodique. L'examen de la trajectoire montre un feuillement très net et la dimension obtenue ($2.25 \pm .05$) suggère un objet fractal. Dans d'autres cas des fluctuations d'amplitude sur le signal laissent supposer que la physique du système a évolué pendant l'acquisition. On retrouve alors le même type de caractéristiques sur la trajectoire mais le calcul de dimension montre qu'alors les pentes ne deviennent parallèles que sur un petit intervalle et pour des dimensions d'espaces élevées. Il est alors difficile d'accorder foi à l'existence d'un chaos à petit nombre de degré de liberté dans ces cas. On doit alors utiliser des techniques plus lourdes et couteuses comme le calcul du plus grand exposant de Lyapounov [15], qui revient à étudier la divergence de deux trajectoires voisines sur l'attracteur. C'est alors la seule façon sinon de trancher d'aller au delà des informations déjà glanées. Le point important dans l'utilisation pratique, de ces techniques reste toujours le même; il faut être certain du système qu'on étudie. L'application de toutes les techniques évoquées précédemment est comme pour les méthodes classiques possible sur tous les signaux. L'interprétation des résultats suppose une bonne connaissance de l'évolution temporelle du signal. La parenté entre les figures 7 a et b, alors que l'un des signaux est un fragment de transitoire, montre que l'on peut très facilement voir du chaos là où il n'y a qu'un

système physique évoluant.

Conclusion.

Pour conclure sur ces quelques exemples d'utilisation des outils du chaos dans l'étude des signaux acoustiques émis par des instruments de musique, il faut d'abord souligner l'extrême simplicité des concepts et des techniques de base, qui font l'utilité et l'universalité de ces outils. Ils sont à la base de l'observation pour le physicien qui soupçonne des bifurcations et autres phénomènes du même genre. Leur interprétation n'est malheureusement simple que pour des trajectoires que l'on peut qualifier d'attracteurs du système. Il faut donc être certain d'être parvenu sur cet attracteur et de ne pas en être sorti pour invoquer des outils plus sophistiqués. Conclure, enfin, de façon péremptoire, que tel ou tel signal est chaotique nécessite pour l'expérimentateur à la fois beaucoup de courage et de sang froid. Le bruit, instrumental ou extérieur, perturbe beaucoup tous les indicateurs du chaos. Les conclusions sont enfin encore plus délicates à tirer quand comme souvent dans l'étude de signaux d'origine naturelle il est difficile voire impossible de refaire l'expérience et que notre chaos n'est pas le résultat de la variation lente et maîtrisée d'un paramètre de contrôle.

Références:

- [1] M.E. Mc INTYRE, R.T. SCHUMACHER et J. WOODHOUSE, "On the oscillations of musical instruments", J. Acoust. Soc. Am., 74, 1825-1845, 1983.



- [2] C. MAGANZA, R. CAUSSE et F. LA-
LOE, "Bifurcations, period doublings and
chaos in clarinet-like systems", *Europhys.*
Lett. **1**, 295, 1986.
- [3] V. GIBIAT, "Phase space representations of musical acoustical signals", *Journal of Sound and Vib.*, **123**, 529-536, 1988.
- [4] P. COULLET dans "Le chaos théorie et expériences" chapitre 2, collection CEA synthèses , Eyrolles éditeur Paris (1988)
- [5] F. TAKENS "Detecting strange attractors in turbulence", lecture notes in mathematics, vol **898** "Dynamical systems and turbulence", Rand et Young éditeurs Berlin (1981).
- [6] P. BERGE, Y. POMEAU, Ch. VIDAL, "L'ordre dans le chaos", Hermann éditeur, Paris (1984).
- [7] W. LAUTERBORN et U. PARLITZ, "Methods of chaos physics and their application to acoustics", *J. Acoust. Soc. Am.* **84**, p. 1975-1993, 1988.
- [8] "Traitement numérique des attracteurs étranges", Actes du séminaire de Grenoble Editions du CNRS Paris (1987).
- [9] A. M. FRASER, "Reconstructing attractors from scalar time series: a comparison of singular system and redundancy criteria", *Physica* **34 D**, p. 391-404, 1989.
- [10] M. CASTELLENGO et S. CHAINTR-EUIL, "Analyses comparées de divers sons multiphoniques instrumentaux", 11ième ICA Paris, 1983.
- [11] S. CHAINTREUIL, V. GIBIAT et F.
WU, "Codage d'un son multiphonique", 11ième ICA Paris 1983.
- [12] J. PUAUD, R. CAUSSE et V. GIBIAT, "Quasi-périodicité et bifurcations dans la note de loup", *J. Acoustique*, **4**, p. 253-259, 1991.
- [13] P. S. LINSAY et A. W. CUMMING "Three-frequency quasiperiodicity, phase locking and the onset of chaos", *Physica* **40 D**, p. 196-217, 1989.
- [14] P. GRASSBERGER et Y. PROCACIA, "Measuring the strangeness of strange attractors", *Physica* **9D**, p. 189-208, 1983.
- [15] J. HOLZFUSS et W. LAUTERBORN, "Liapounov exponents from time series of acoustic chaos", *Phys. Rev. A* **399**, p. 2146-2152, 1989.



Figures.

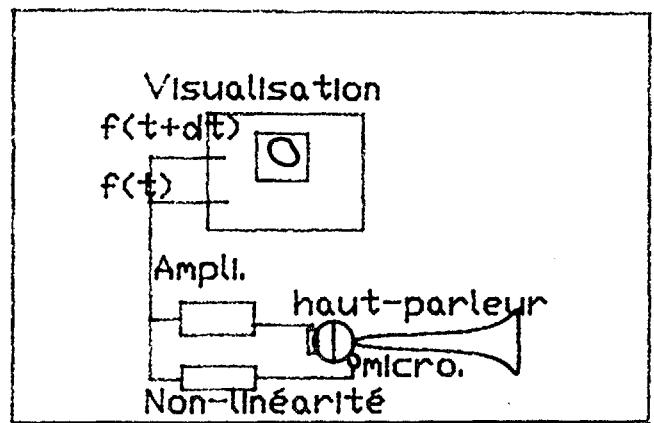


figure 1.

Dispositif simulant un instrument à vent à anche, utilisé pour produire une cascade de doublements de périodes.

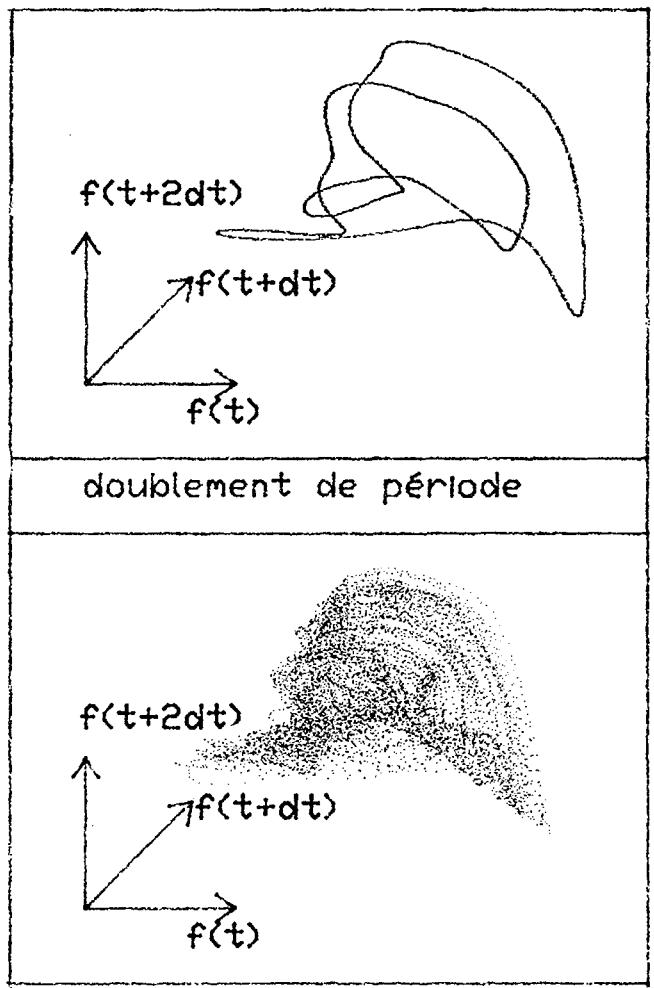
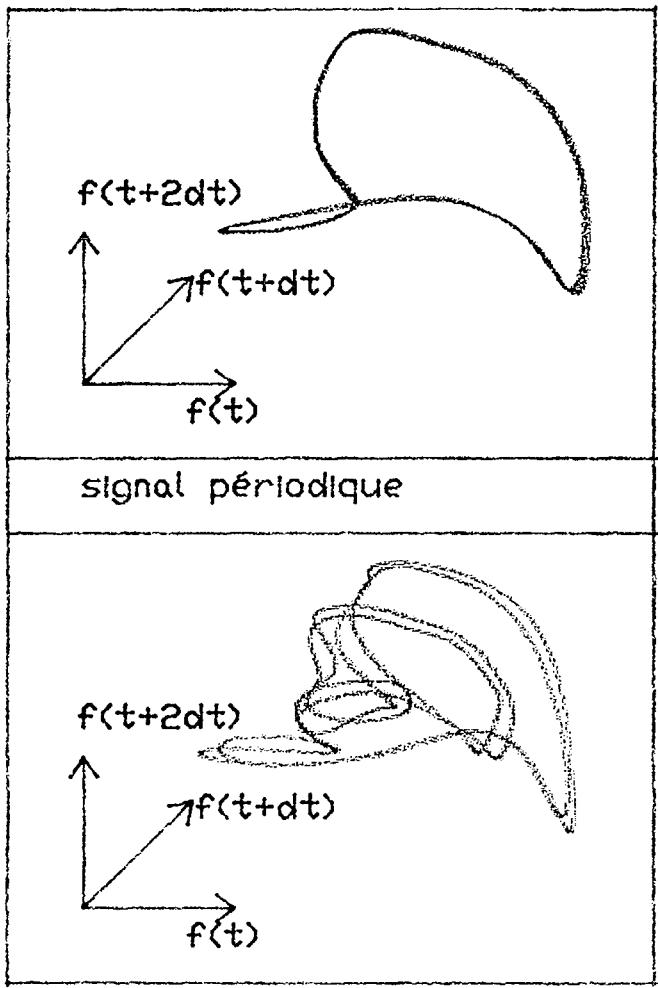


Figure 2.

Cascade de doublements de périodes présentés dans un espace de phase reconstruit à 3 dimensions.

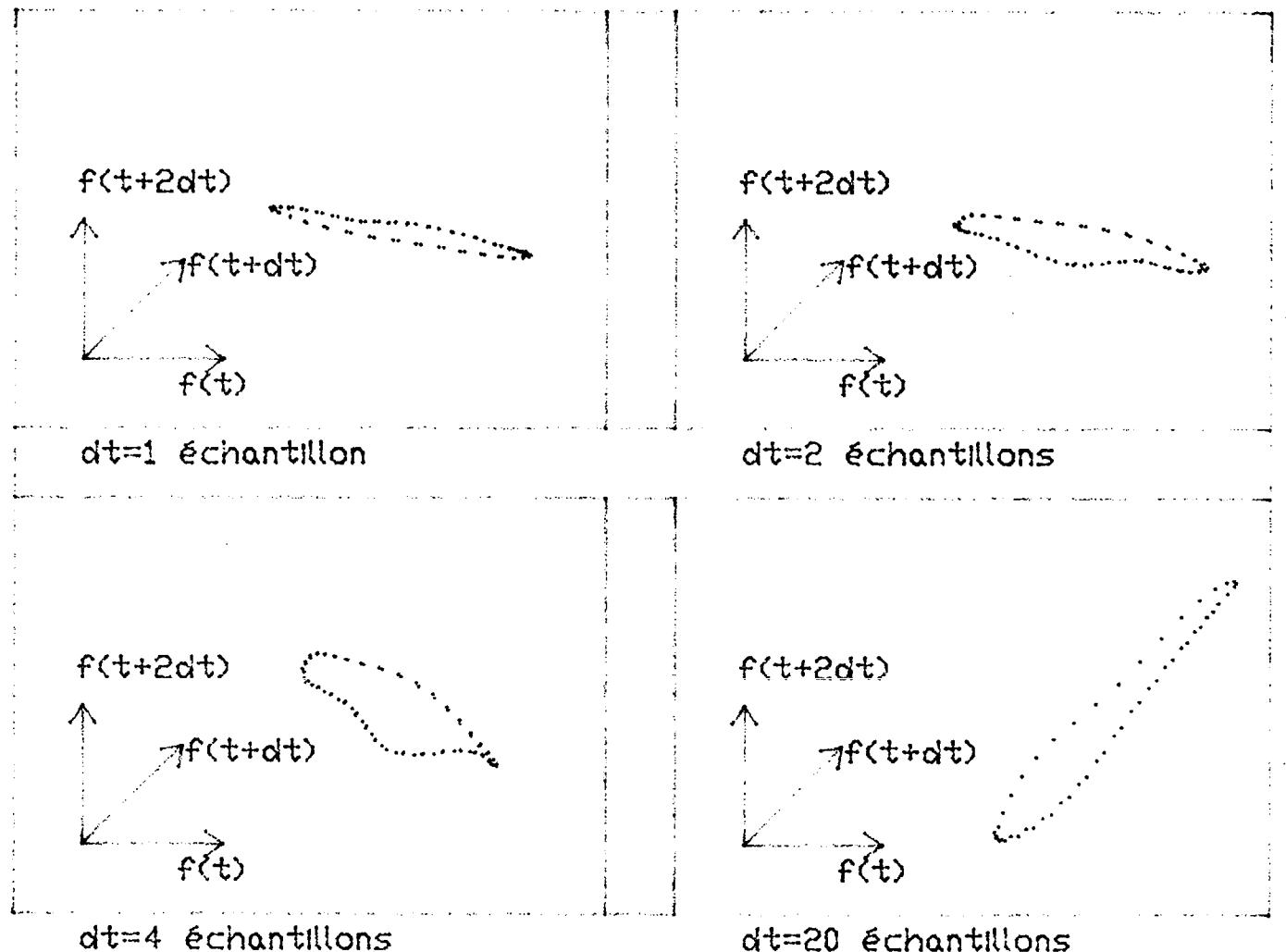


Figure 3.
Exemples de reconstructions d'espaces de phases
avec des délais variés.

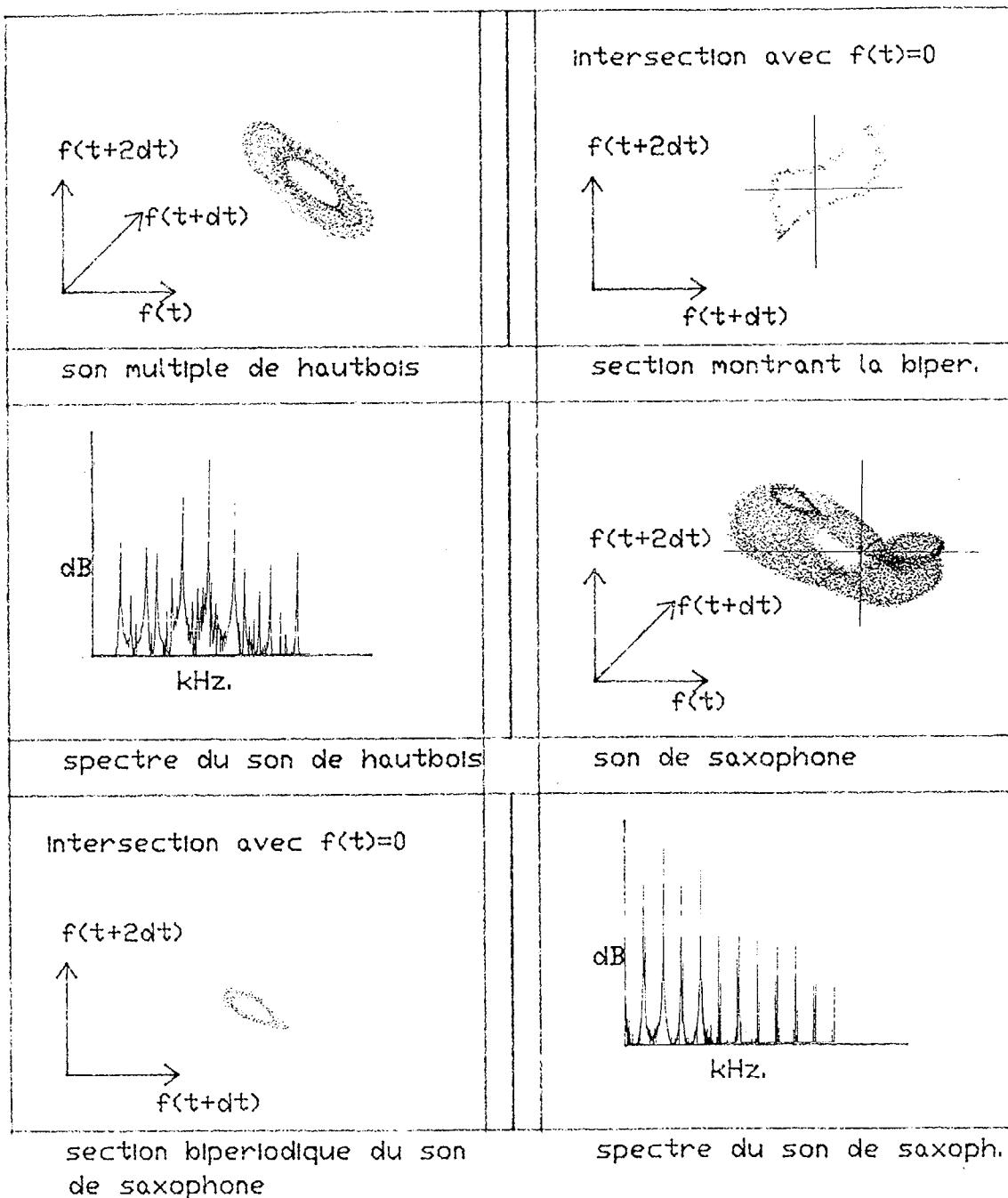


Figure 4.
Signaux acoustiques bipériodiques.
L'identification de la bipériodicité est rendue très simple
par l'usage des sections de Poincaré.

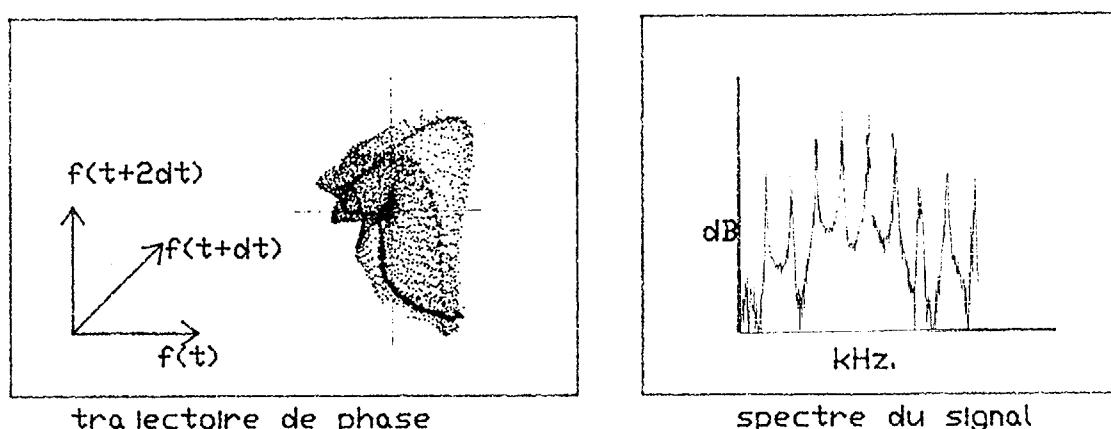
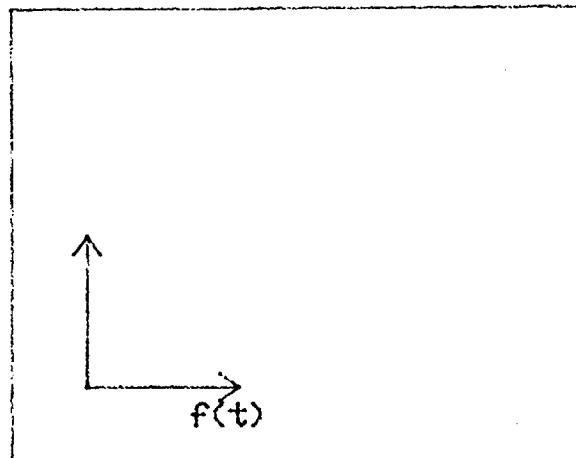
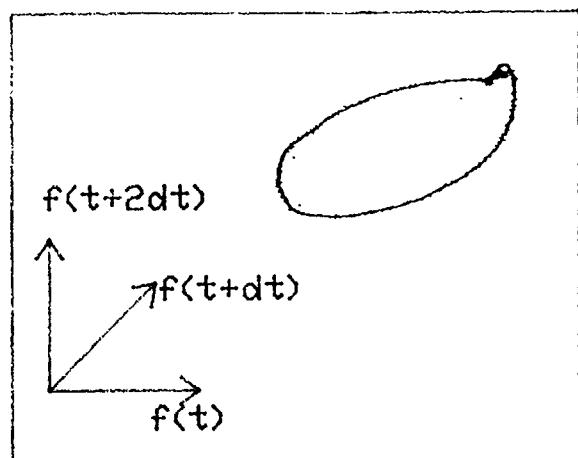
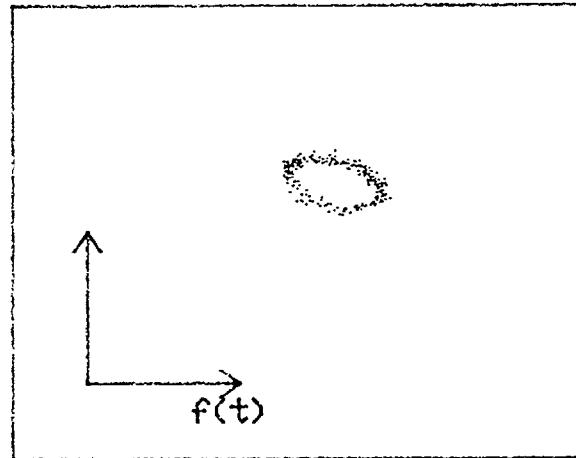
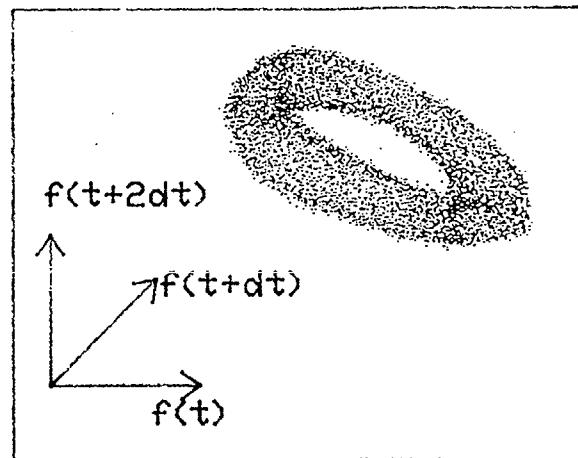


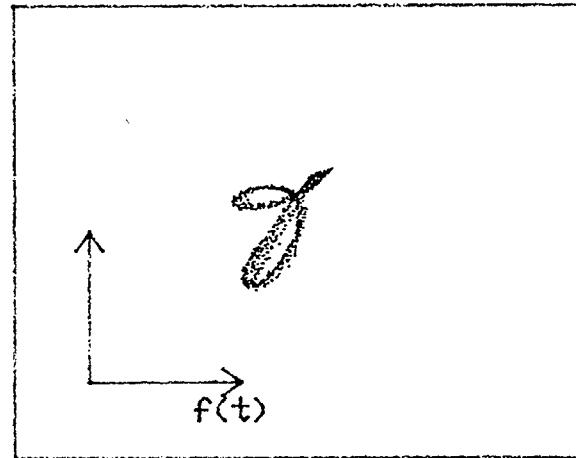
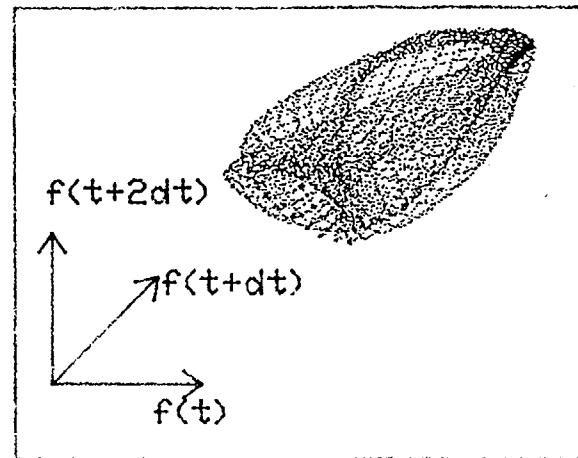
Figure 5.
Multiphonique de hautbois "chaotique".



signal périodique et section de poincaré correspondant

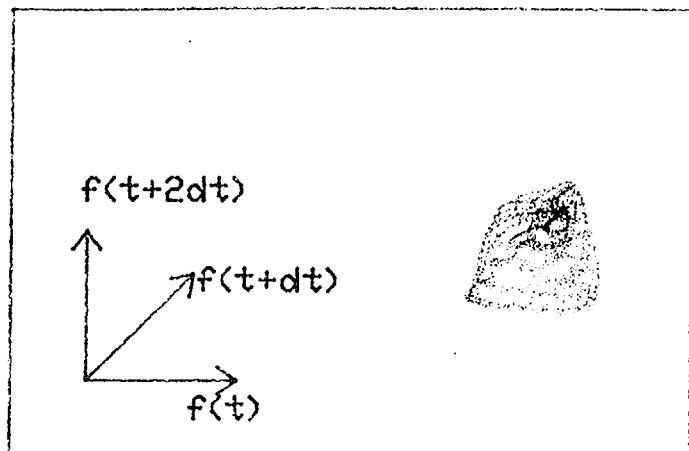


signal bipériodique et section de poincaré

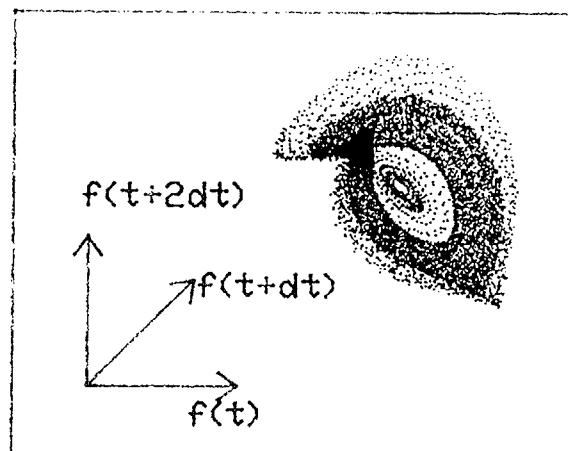


signal à trois fréquences de base dont deux sont proches d'un rapport trois.

Figure 6.
Trajectoires de phases et sections de poincaré
d'un son de loup de la bipériodicité à la tripériodicité
avec et sans accrochage de phase.



trajectoire d'un signal
"chaotique"



trajectoire d'un transi-
toire

*Figure 7.
Représentation d'un son multiphonique stable "chaotique",
et d'un autre son avec son transitoire.*