ETUDE STATISTIQUE DES COEFFICIENTS DE REFLEXION

Jean-Yves TOURNERET

GAPSE / ENSEEIHT, 2 rue Camichel, 31071 Toulouse, France

RÉSUMÉ

Les coefficients de réflexion, appelés aussi coefficients PARtiels de CORrélation (PARCOR), jouent un rôle très important en traitement de la parole [1] en quantification et en compression de données [2] [3]. Ils possèdent en effet de multiples propriétés agréables comme :

1) ils garantissent la stabilité du filtre équivalent reconstitué après quantification [3]

2) on peut définir un codage optimum à l'aide de ces paramètres [4]

Cet article présente une méthode récursive permettant de déterminer la statistique des coefficients de réflexion estimés à partir de celle du vecteur constitué des estimations des paramètres AR.

ABSTRACT

Reflection coefficients are successfully used in many fields such as Speech Processing [1], quantization or data compression [2] [3]. They have namely a lot of desirable properties as :

1) filter stability upon quantization [3]

2) optimal quantization may be defined with these parameters [4]

The aim of this paper is to present a recursive method for computing the estimated reflection coefficient probability density function assuming known that of estimated AR parameters.

1- INTRODUCTION

Les coefficients de réflexion jouent un rôle très important en traitement du signal. Ils permettent par exemple de caractériser la stabilité des modèles paramétriques AR. Mais ils sont également beaucoup utilisés en quantification et en compression de données. L'estimation de ces coefficients est généralement effectuée à partir de celle des paramètres AutoRégressifs (AR) notées $\hat{a}_k$. Il existe un grand nombre d'applications pour lesquelles la loi de probabilité de ces paramètres AR est supposée connue. Par exemple, Mann et Wald [2] ont montré que la loi du vecteur $[\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_p]$ est asymptotiquement gaussienne. Lorsque les paramètres AR sont estimés à partir d'un nombre de points "suffisamment élevé", on suppose alors que leur loi de probabilité est gaussienne. Nous proposons, dans une première partie, une méthode récursive permettant de déterminer la loi des coefficients de réflexion estimés en supposant connue celle du vecteur $[\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_p]$. Nous présentons dans une seconde partie quelques simulations illustrant l'étude théorique.

2- ETUDE THEORIQUE

Les coefficients de réflexion notés k_i, s'obtiennent à partir des paramètres autorégressifs à l'aide des relations suivantes :

$$i = 1, \dots, p \qquad k_i = a_i^{(i)} \tag{1}$$

$$1 \le j \le i-1 \qquad a_j^{(i-1)} = \frac{a_j^{(i)} - a_i^{(i)} a_{i-j}^{(i)}}{1 - k_i^2} \tag{2}$$

avec $a_j^{(p)} = a_j$ pour $1 \le j \le p$, p étant l'ordre du modèle autorégressif choisi et a_j $(1 \le j \le p)$ ses paramètres. L'initialisation se fait à l'aide de la relation :

$$[a_1^{(p)}, \dots, a_p^{(p)}] = [a_1, \dots, a_p]$$

On calcule ensuite les p-1 vecteurs $[a_1^{(i)}, \dots, a_p^{(i)}]$ pour $i = p-1, p-2, \dots, 1$. A chaque étape, on détermine un coefficient de réflexion à l'aide de $k_i = a_i^{(i)}$. Pour estimer les coefficients de réflexion, on commence généralement par estimer les paramètres AR, par exemple à l'aide d'une procédure des moindres carrés. Ces estimations seront notées $\hat{a}_i$ avec $i = 1, \dots, p$. On utilise ensuite les relations (1) et (2) pour estimer les coefficients de réflexion notés alors $\hat{k}_i$. Nous proposons une méthode récursive permettant de déterminer la densité de probabilité des coefficients de réflexion estimés en fonction de celle des paramètres autorégressifs $\hat{a}_i$. Dans un premier temps, on considère le vecteur $\underline{V}_i^T$ défini par :

$$\underline{V}_i^T = [\hat{a}_p^{(p)}, \hat{a}_{p-1}^{(p-1)}, \dots, \hat{a}_i^{(i)}, \hat{a}_{i-1}^{(i)}, \hat{a}_{i-2}^{(i)}, \dots, \hat{a}_1^{(i)}]$$

T désignant le symbole de transposition. Notons bien que ce vecteur peut se décomposer en deux sous-vecteurs :

* le premier contient $p-i+1$ composantes égales aux $p-i+1$ coefficients de réflexion $k_p, \dots, k_i$:
$$[\hat{a}_p^{(p)}, \dots, \hat{a}_i^{(i)}]$$
* le second possède $i-1$ composantes et s'écrit :
$$[\hat{a}_{i-1}^{(i)}, \dots, \hat{a}_1^{(i)}]$$

En particulier, pour i=p, on a $\underline{V}_p^T = [\hat{a}_p, \hat{a}_{p-1}, \dots, \hat{a}_1]$. La loi du vecteur $\underline{V}_p^T$ est donc connue par hypothèse.

Nous allons alors déterminer par récurrence la loi des vecteurs $\underline{V}_i^T = [v_i(1), \dots, v_i(p)]$. Pour passer de la loi de $\underline{V}_i^T$ à $\underline{V}_{i-1}^T$, il faut noter que les p-i+1 premières composantes de ces deux vecteurs sont identiques et égales aux p-i+1 premiers coefficients de réflexion. Les i-1 composantes restantes de $\underline{V}_{i-1}^T$ à savoir $[\hat{a}_{i-1}^{(i-1)}, \dots, \hat{a}_1^{(i-1)}]$ sont liées à celles de $\underline{V}_i^T$ par les relations :

$$1 \le j \le i-1 \qquad \hat{a}_j^{(i-1)} = \frac{\hat{a}_j^i - \hat{a}_i^{(i)}\hat{a}_{i-j}^{(i)}}{1 - \hat{a}_i^{(i)2}} \tag{3}$$

c'est à dire que l'on a :

$$v_{i-1}(j) = v_i(j) \tag{4}$$

pour $j = 1, \dots, p-i+1$
et :

$$v_{i-1}(j) = \hat{a}_{p-j+1}^{(i-1)} = \frac{v_i(j) - v_i(p-i+1)v_i(2p+2-i-j)}{1 - v_i^2(p-i+1)}$$

pour $j = p-i+2, \dots, p$ (5)

On vérifiera aisément que l'indice $2p+2-i-j$ prend les mêmes valeurs que j c'est-à-dire $p-i+2, \dots, p$. Dans un premier temps, nous devons déterminer le jacobien de la transformation correspondant au passage de $\underline{V}_i$ à $\underline{V}_{i-1}$ et donc il faut inverser les relations liant les coordonnées de ces deux vecteurs. Il n'y a aucun problème pour les $p-i+1$ premières coordonnées puisqu'elles sont identiques. Par contre, il faut étudier les $i-1$ dernières. En utilisant la relation $v_i(p-i+1) = \hat{a}_i^{(i)} = v_{i-1}(p-i+1)$, on obtient :

$$v_{i-1}(j) = \hat{a}_{p-j+1}^{(i-1)} = \frac{v_i(j) - v_{i-1}(p-i+1)v_i(2p+2-i-j)}{1 - v_{i-1}^2(p-i+1)}$$

pour $j = p-i+2, \dots, p$ (6)

ce qui donne finalement :

$$v_i(j) - v_{i-1}(p-i+1)v_i(2p+2-i-j) = [1 - v_{i-1}^2(p-i+1)]v_{i-1}(j) \tag{7}$$

pour $j = p-i+2, \dots, p$

Les deux indices $2p+2-i-j$ et j sont égaux pour $i = 2(p+1-j)$ c'est à dire qu'il ne peut y avoir égalité que pour i pair. Nous devons alors distinguer deux cas :

1er Cas : i impair

Les deux indices $2p+2-i-j$ et j sont alors nécessairement différents et appartiennent à l'ensemble $\{p-i+2, \dots, p\} = \{p-i+1+1, \dots, p-i+1+i-1\}$. Le système (7) constitué de $i-1$ équations à $i-1$ inconnues peut alors se réécrire comme $(i-1)/2$ systèmes de deux équations à deux inconnues :

$$v_i(k) - v_{i-1}(p-i+1)v_i(2p+2-i-k) = [1 - v_{i-1}^2(p-i+1)]v_{i-1}(k)$$

$$v_i(2p+2-i-k) - v_{i-1}(p-i+1)v_i(k) = [1 - v_{i-1}^2(p-i+1)]v_{i-1}(2p+2-i-k) \tag{8}$$

k variant de $p+2-i$ à $p-(i-1)/2$. Le système d'ordre k admet alors pour solution :

$$v_i(2p+2-i-k) = v_{i-1}(p-i+1)v_{i-1}(k) + v_{i-1}(2p+2-i-k)$$

$$v_i(k) = v_{i-1}(k) + v_{i-1}(2p+2-i-k)v_{i-1}(p-i+1) \tag{9}$$

Le jacobien du changement de variable correspondant au passage de $\underline{V}_i^T$ à $\underline{V}_{i-1}^T$ est alors la valeur absolue du déterminant de la matrice bloc suivante :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

A, B, C et D étant des matrices de dimensions respectives $(p-i+1)\times(p-i+1)$, $(p-i+1)\times(i-1)$, $(i-1)\times(p-i+1)$, $(i-1)\times(i-1)$ définies de la façon suivante :

A est la matrice identité d'ordre p-i+1,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & 0 \\ v_{i-1}(p) & . & . & . & v_{i-1}(p+2-i) \end{pmatrix}$$

C est la matrice nulle et

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & . & . & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & \alpha & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \alpha & . & . & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & . & . & 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec $\alpha = v_{i-1}(p-i+1)$

On montre alors que le déterminant de cette matrice, qui est le jacobien de la transformation décrite précédemment, est donné par :

$$det(M) = [1-\alpha^2]^{(i-1)/2} \qquad i>1 \qquad (10)$$

2ème Cas : i pair

Les indices $2p+2-i-j$ et j sont alors égaux pour $i = 2(p+1-j)$ c'est à dire pour $j = (2p+2-i)/2$. Le système (7) constitué de $i-1$ équations à $i-1$ inconnues peut alors se réécrire comme $(i-2)/2$ systèmes de deux équations à deux inconnues plus une équation à une inconnue. Les systèmes de deux équations à deux inconnues sont données par :

$$v_i(k) - v_{i-1}(p-i+1)v_i(2p+2-i-k) = [1-v_{i-1}^2(p-i+1)]v_{i-1}(k)$$

$$v_i(2p+2-i-k) - v_{i-1}(p-i+1)v_i(k) = [1-v_{i-1}^2(p-i+1)]v_{i-1}(2p+2-i-k) \qquad (11)$$

k variant de $p+2-i$ à $p-(i-2)/2$.

L'équation proposée ci-dessous permet de déterminer la dernière variable $v_i\left(\frac{2p-i+2}{2}\right)$:

$$v_i\left(\frac{2p-i+2}{2}\right) = [1+v_{i-1}(p-i+1)]v_{i-1}\left(\frac{2p-i+2}{2}\right) \qquad (12)$$

Le jacobien du changement de variables correspondant au passage de $\underline{V}_i$ à $\underline{V}_{i-1}$ est alors la valeur absolue du déterminant de la matrice bloc suivante :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

A, B C étant les matrices définies précédemment (voir cas i impair). Seule D est différente :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . & . & . & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . & . & . & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & . & . & \alpha & 0 & 0 \\ . & . & . & . & 1 & 0 & \alpha & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 0 & 1+\alpha & 0 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & \alpha & 0 & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \alpha & . & . & . & . & . & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & . & . & . & . & . & 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & . & . & . & . & . & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec $\alpha = v_{i-1}(p-i+1)$

On montre alors que le déterminant de cette matrice, qui est le jacobien de la transformation décrite précédemment, est donné par :

$$det(M) = (1+\alpha)[1-\alpha^2]^{(i-2)/2} \qquad i>0 \qquad (13)$$

A l'aide des résultats précédents, si l'on suppose connue la densité de probabilité du vecteur $\underline{V}_i$ notée $f_i(x_p, \dots, x_1)$, on peut alors déterminer celle de $\underline{V}_{i-1}^T$ notée $f_{i-1}(x_p, \dots, x_1)$.

Dans le cas où i est impair (i>1), on a :

$$\boxed{f_{i-1}(x_p, \dots, x_1) = (1-x_i^2)^{\frac{i-1}{2}} f_i(x_p, \dots, x_i, x_{i-1}+x_i x_1, \dots, x_1 + x_i x_{i-1}) \qquad (14)}$$

Dans le cas où i est pair (i>0), alors on a :

$$\boxed{f_{i-1}(x_p, \dots, x_1) = (1+x_i)(1-x_i^2)^{\frac{i-2}{2}} f_i(x_p, \dots, x_i, x_{i-1}+x_i x_1, \dots, (1+x_i)x_{i/2}, \dots, x_1 + x_i x_{i-1}) \qquad (15)}$$

Connaissant la densité de probabilité du vecteur $\underline{V}_p = [\hat{a}_p, \hat{a}_{p-1}, \dots, \hat{a}_1]^T$, on peut alors déterminer, à l'aide de p itérations, la densité du vecteur $\underline{V}_1 = [\hat{a}_p^{(p)}, \dots, \hat{a}_1^{(1)}]^T = [\hat{k}_p, \dots, \hat{k}_1]$. La densité du coefficient de réflexion $\hat{k}_i$ s'obtient alors par intégration de celle du vecteur $\underline{V}_1$.

3- SIMULATIONS

Nous proposons dans cette partie quelques simulations permettant d'illustrer les résultats de l'étude théorique. Considérons un modèle AR d'ordre 2 de paramètres $a_1 = 0.2$ et $a_2 = 0.5$. On suppose que la densité du vecteur $\underline{V}_2 = [\hat{a}_2, \hat{a}_1]^T$ constitué des estimations des paramètres AR est gaussienne de moyenne $\underline{m} = [a_2, a_1]^T$ et de matrice de covariance $\Sigma = \alpha I$, I étant la matrice identité d'ordre 2. La matrice de covariance Σ est choisie diagonale afin de simplifier certains développements mais on pourrait de la même façon considérer une matrice de covariance quelconque. Notons simplement que, dans ce cas, le paramètre α permet de régler la variance des estimations des paramètres AR. L'hypothèse de normalité des paramètres AR est généralement admise dans la plupart des applications. Elle peut parfois se justifier à l'aide du théorème de Mann et Wald [5] mais une généralisation serait abusive. Les résultats que nous proposons peuvent aisément s'étendre au cas de lois de probabilité non gaussiennes. A partir de la loi de probabilité des paramètres AR, nous avons déterminé celle des coefficients de réflexion appelée densité théorique. Nous avons ensuite généré $N = 2500$ réalisations des variables gaussiennes $\hat{a}_1$ et $\hat{a}_2$. A l'aide des relations (1) et (2), nous avons alors déterminé N réalisations des variables $\hat{k}_1$ et $\hat{k}_2$. La loi de probabilité de $\hat{k}_1$ a alors été estimée par histogramme (200 classes) et comparée à la densité théorique. Le second coefficient de réflexion vérifiant $\hat{k}_2 = \hat{a}_2$, il est nécessairement gaussien et donc nous nous sommes limités à l'étude du premier coefficient de réflexion $\hat{k}_1$. On obtient les résultats suivants :

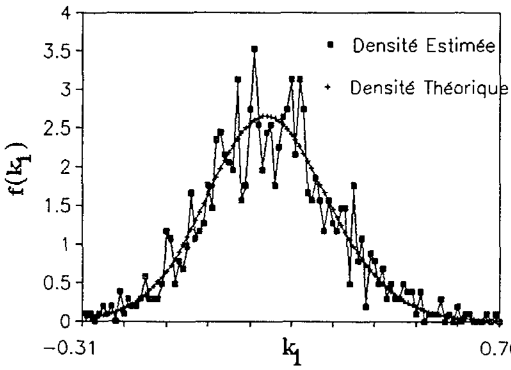

Fig 1 : densité de probabilité de $\hat{k}_1$ pour $\alpha = 0.05$

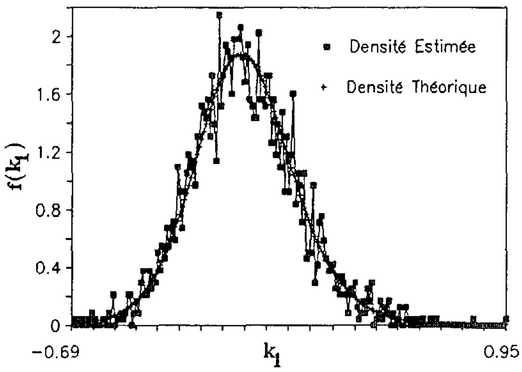

Fig 2 : densité de probabilité de $\hat{k}_1$ pour $\alpha = 0.01$

Comme on peut le constater, les résultats de simulations sont en parfait accord avec les résultats de l'étude théorique.

4- CONCLUSION

Cette étude permet de déterminer de manière récursive la densité de probabilité des coefficients de réflexion en fonction de celle des paramètres AR. Cette densité joue un rôle très important lorsque l'on cherche à quantifier les coefficients de réflexion :

* la connaissance du minimum et du maximum de cette densité permet de réduire l'intervalle de quantification,
* la connaissance de sa forme permet d'optimiser le quantificateur c'est à dire de choisir les instants de décision et les niveaux de quantification donnant une distorsion minimale [4]. (Max définit la distorsion d'un quantificateur comme l'espérance mathématique d'une fonction différentiable de la différence entre l'entrée et la sortie du quantificateur).

5- REFERENCES

[1] A. H. Gray and D.Y. Wong, "The Burg Algorithm for LPC Speech Analysis/Synthesis," IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol. 28, n°6, pp. 609-615, December 1980.

[2] J. D. Markel and A. H. Gray, "Implementation and Comparison of two Transformed Reflection Coefficient Scalar Quantization Methods," IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol. 28, n°5, pp. 575-583, October 1980.

[3] J. Makhoul, "Linear Prediction : a tutorial review," Proc. of the IEEE, n°4, pp. 561-580, April 1984.

[4] J. Max, "Quantizing for Minimum Distortion," IRE Trans. Inform. Theory, vol. IT n°6, pp. 7-12, March 1960.

[5] H. B. Mann and A. Wald, "On the Statistical Treatment of Linear Stochastic Difference Equations," Econometrica, vol. 11, pp. 173-220, 1943.