

Optimisation de la fréquence de formation de faisceaux en sub-THz

Florian POLSTER–PRIETO Hajar EL HASSANI Inbar FIJALKOW

ETIS, UMR 8051 / CY Cergy Paris University, ENSEA, CNRS, 6 Avenue du Ponceau, 95000 Cergy, France

Résumé – Ce papier propose une optimisation de la fréquence de formation de faisceaux dans des réseaux linéaires uniformes ultra massifs dans le cadre des fréquences sub-THz qui subissent un dépointage de faisceaux.

Abstract – In this paper, we propose to adapt the beamforming frequency for ultra massive uniform linear arrays allowing a maximum array gain while trying to minimize the angle deviation induced by the beam squint effect.

1 Introduction

Une des propositions de la 6G [2] est d’augmenter les débits de communication en augmentant la bande passante, et ainsi la fréquence vers les sub-THz (100 – 300 GHz). Cette augmentation entraîne une montée des coûts énergétiques dans les systèmes utilisant du MIMO massif [4]. La solution considérée par la littérature est le précodage hybride, qui consiste à décomposer un précodeur digital classique en deux parties, un précodeur digital suivi d’un précodeur analogique, permettant ainsi de réduire les dimensions du système. Dans le cas de grandes bandes passantes, le précodeur analogique, sous la forme d’un formateur de faisceaux à l’aide de déphaseurs, subit le **dépointage de faisceaux**, qui décale l’angle de gain maximal selon la fréquence dans la bande [2, 5].

Afin de réduire ce dépointage, nous proposons de ne pas forcer la fréquence des déphaseurs à la fréquence centrale de la bande. Nous allons trouver la fréquence qui minimise la déviation d’angle.

2 Préliminaires

2.1 Modèle

Nous considérons dans ce papier un réseau d’antennes uniformes constitué de N antennes espacées uniformément d’une distance d . L’angle $\theta \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ est défini comme l’angle d’émission ou de réception en fonction du mode de transmission du réseau d’antennes. Le vecteur de réponse d’un réseau d’antennes linéaires uniformes est [6] :

$$\mathbf{a}(\theta, f) = [1, e^{j2\pi\lambda^{-1}d \sin(\theta)}, \dots, e^{j2\pi\lambda^{-1}(N-1)d \sin(\theta)}]^T, \quad (1)$$

avec $\lambda = \frac{c}{f}$ la longueur d’onde d’utilisation, où c est la célérité de l’onde et f la fréquence d’utilisation. En supposant des phases des déphaseurs continues et non soumises à de la quantification, les déphaseurs sont modélisés par le vecteur \mathbf{w}

$$\mathbf{w} = [e^{j\beta_1}, \dots, e^{j\beta_N}]^T, \quad (2)$$

avec β_n la phase du n -ième déphaseur connecté à la n -ième antenne [2]. En bande étroite, i.e., quand $B = f_{max} - f_{min} \ll f_c = \frac{f_{max} + f_{min}}{2}$, la phase optimale est :

$$\beta_n(\theta_t) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n-1)d \sin(\theta_t) = \frac{2\pi d}{c}(n-1)f_c \sin(\theta_t), \quad (3)$$

avec $n \in \{1, \dots, N\}$ et $f_0 = f_c$, permettant d’assurer un gain optimal pour l’angle ciblé $\theta_t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Le gain d’antenne [2] :

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta, f) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N e^{j[2\pi\lambda^{-1}(n-1)d \sin(\theta) - \beta_n(\theta_t)]} \quad (4)$$

et son amplitude est [8] :

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N e^{j(n-1)\pi \frac{2d}{c} (f \sin(\theta) - f_0 \sin(\theta_t))} \right| \\ &= \left| \frac{\sin\left(\frac{dN\pi}{c} (f \sin(\theta) - f_0 \sin(\theta_t))\right)}{\sqrt{N} \sin\left(\frac{d\pi}{c} (f \sin(\theta) - f_0 \sin(\theta_t))\right)} \right| \\ &= \left| \frac{\sin\left(\frac{N\pi}{2f_c} (f \sin(\theta) - f_0 \sin(\theta_t))\right)}{\sqrt{N} \sin\left(\frac{\pi}{2f_c} (f \sin(\theta) - f_0 \sin(\theta_t))\right)} \right|. \end{aligned} \quad (5)$$

L’espacement entre les antennes est généralement fixé à $d = \frac{\lambda_c}{2} = \frac{c}{2f_c}$ [2], et ne peut pas être modifié par la suite.

L’amplitude du gain peut donc être exprimée en fonction de

$$x = \frac{f}{f_c} \sin(\theta) - \frac{f_0}{f_c} \sin(\theta_t), \quad (6)$$

et nous la notons

$$|g(x)| = \left| \frac{\sin\left(\frac{N\pi}{2} x\right)}{\sqrt{N} \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right)} \right|. \quad (7)$$

Bien que ce ne soit pas forcément la meilleure solution en large bande (β_n peut être directement optimisé comme dans [3, 7]), la définition (3) est cependant extrêmement répandue dans l’état de l’art ([2, 5, 9] par exemple). Dans tous les papiers utilisant la définition (3), la fréquence du déphaseur f_0 est fixée à la fréquence centrale $f_c = (f_{max} + f_{min})/2$ de la bande $B = [f_{min}; f_{max}]$. Dans ce papier, nous autorisons f_0 à être différent de f_c .

L’équation (6) est sensiblement différente de celle trouvée dans l’état de l’art (car $f_0 \neq f_c$ est autorisé) mais l’expression de l’amplitude du gain (7) est bien la même que dans [2].

À grande fréquence comme les sub-THZ (i.e. f_c de l'ordre de 100 – 300 GHz) et avec une bande large (i.e. B n'est plus négligeable devant f_c), l'effet de dépointage de faisceaux se produit. Le dépointage de faisceaux se traduit par un décalage de l'angle qui maximise le gain en fonction de la fréquence f . En bande étroite, le dépointage de faisceaux est négligeable car l'approximation $f \approx f_c \approx f_0$ est vraie sur toute la bande B , ce qui implique que l'angle θ permettant d'atteindre $|g(0)|_{max} = \sqrt{N}$ est égal à l'angle ciblé θ_t . En sub-THz cependant, résoudre $x = 0$ dans (6) donne alors un angle θ qui dévie de θ_t en fonction de f . Cet effet est appelé le "beam squint", que l'on pourrait traduire littéralement par strabisme divergent de faisceaux. On utilise plutôt l'expression dépointage de faisceaux. Dans la suite du papier, nous nous intéressons à l'impact du choix de la fréquence des déphaseurs f_0 qui est choisie dans la littérature comme étant la fréquence centrale f_c . Nous proposons dans ce papier une méthode permettant d'optimiser f_0 afin de réduire le dépointage de faisceaux.

2.2 Déviation d'angle

Pour optimiser la fréquence des déphaseurs, nous utilisons la déviation d'angle $\Delta\theta \in [0; 1]$ qui mesure l'écart entre l'angle visé θ_t et l'angle θ pour des valeurs fixées de θ_t , θ , f , f_0 et N :

$$\Delta\theta(x) = \left(\frac{\theta_t - \theta}{\pi} \right)^2. \quad (8)$$

Nous utilisons également l'intégrale en fonction de la fréquence de cette métrique pour mesurer l'impact moyen du dépointage de faisceaux sur toute la bande B :

$$\langle \Delta\theta(x) \rangle = \frac{1}{B} \int_{[B]} \Delta\theta(x) df. \quad (9)$$

Ces métriques, ainsi que l'amplitude du gain, nous permettent de comparer par la suite les différentes méthodes proposées. Dans la suite du papier, la bande de fréquence est fixée à $[f_{max}; f_{min}]$ pour toutes les méthodes différentes pour pouvoir les comparer de manière équitable.

3 Choix de la fréquence des déphaseurs

3.1 Fréquence centrale

Dans toute la littérature, f_0 est égal à la fréquence centrale [2, 5, 9]. Ce choix peut cependant avoir des conséquences déplorables en fonction de la fréquence :

- lorsque $\frac{f_c}{f} |\sin(\theta_t)| \leq 1$, i.e., $f \geq f_c |\sin(\theta_t)|$ l'angle optimal permettant de résoudre $|g(0)|_{max} = \sqrt{N}$ est

$$\theta^* = \arcsin\left(\frac{f_c}{f} \sin(\theta_t)\right). \quad (10)$$

- lorsque $\frac{f_c}{f} |\sin(\theta_t)| > 1$, i.e., $f < f_c |\sin(\theta_t)|$, il est impossible de résoudre $x = 0$ (ou $x = 2k, \forall k \in \mathbb{Z}$ car $|g(x)|$ est 2-périodique) car la fonction arcsin est définie sur l'intervalle $[-1; 1]$. Dans ce cas, nous fixons $\theta^* = \frac{\pi}{2} \text{sign}(\theta_t)$. Ce cas de figure se produit en particulier

lorsque $B > 2f_c(1 - |\sin(\theta_t)|)$, ce qui correspond à une grande bande ou un grand angle θ_t , ou les deux. Nous n'avons trouvé aucune référence y faisant allusion.

Nous appelons cette première méthode la méthode classique, du fait qu'elle soit utilisée dans tous les papiers utilisant des déphaseurs définis comme dans l'équation (3).

3.2 Fréquence à gauche

Comme la méthode classique n'est pas satisfaisante pour $f < f_c |\sin(\theta_t)|$, nous proposons une méthode qui fait en sorte que cette condition n'est jamais vérifiée. En fixant $f_0 = f_{min}$, l'angle optimal θ^* est bien défini pour tout f :

$$\theta^* = \arcsin\left(\frac{f_{min}}{f} \sin(\theta_t)\right) \quad (11)$$

et permet d'atteindre le gain maximal $|g(0)|_{max} = \sqrt{N}$. Cependant, cette méthode induit une plus grande déviation d'angle $\langle \Delta\theta(x) \rangle$ que la méthode classique. Ce comportement nous a poussé à chercher une méthode permettant d'assurer un gain maximal $|g(0)|_{max} = \sqrt{N}$ pour toutes les fréquences tout en minimisant la déviation d'angle.

4 Déphaseur adaptée

Dans cette section, nous proposons d'adapter le déphaseur

$$\beta_n(\theta_t) = \frac{2\pi d}{c} (n-1) f_c (\sin(\theta_t) + \varphi(\theta_t)) \quad (12)$$

de manière à optimiser la déviation d'angle $\theta_t - \theta^*$. En minimisant cette déviation, nous espérons améliorer le gain dans la direction θ_t comme le montre la Fig. 1.

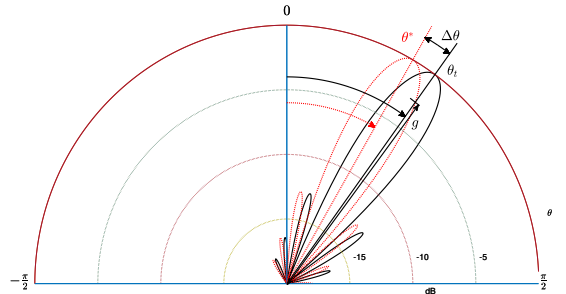


FIGURE 1 : Exemple de la déviation d'angle induite par le dépointage de faisceaux. Le faisceau noir représente le faisceau ciblé en θ_t tandis que le faisceau rouge représente le faisceau pour le même θ_t à une fréquence $f \geq f_0$. Les cercles représentent le gain relatif en dB.

Le but de cette méthode est de trouver $\varphi(\theta_t)^*$ tel que :

$$\varphi(\theta_t)^* = \arg \min_{\varphi(\theta_t)} \langle \Delta\theta(x) \rangle. \quad (13)$$

Avec cette définition de $\beta_n(\theta_t)$, x s'écrit :

$$x = \frac{f}{f_c} \sin(\theta_t) - \sin(\theta_t) - \varphi(\theta_t) \quad (14)$$

Pour assurer un gain maximal sur toute la bande, nous imposons donc une contrainte $-1 \leq \frac{f_c}{f_{min}} \left(\sin(\theta_t + \varphi(\theta_t)) \right) \leq 1$ pour pouvoir résoudre $x = 0$.

Le problème d'optimisation s'écrit donc :

$$\min_{\varphi(\theta_t)} \langle \Delta\theta(0) \rangle, \text{ s.t. } -1 \leq \frac{f_c}{f_{min}} \left(\sin(\theta_t + \varphi(\theta_t)) \right) \leq 1. \quad (15)$$

La résolution analytique de ce problème étant compliquée à cause d'une dépendance en θ et $\sin(\theta)$, nous introduisons la fonction $\Delta\tilde{\theta}$ qui calcule la déviation d'angle à l'aide des sinus des angles pour l'utiliser dans l'optimisation :

$$\Delta\tilde{\theta}(x) = \left(\frac{\sin(\theta_t) - \sin(\theta)}{2} \right)^2 \in [0, 1]. \quad (16)$$

Le problème se réécrit :

$$\min_{\varphi(\theta_t)} \langle \Delta\tilde{\theta}(0) \rangle, \text{ s.t. } -1 \leq \frac{f_c}{f_{min}} \left(\sin(\theta_t + \varphi(\theta_t)) \right) \leq 1. \quad (17)$$

L'équation (17) se résout grâce aux conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) [1]. KKT nécessite une fonction et une contrainte convexe sur l'intervalle $[f_{min}; f_{max}]$, ce qui est le cas pour notre optimisation.

Démonstration de l'optimisation sous contrainte. Le Lagrangien est défini tel que :

$$L(\varphi(\theta_t), \lambda^+, \lambda^-) = \langle \Delta\tilde{\theta}(0) \rangle + \lambda^+ \left(f_c (\sin(\theta_t) + \varphi(\theta_t)) - f_{min} \right) - \lambda^- \left(f_c (\sin(\theta_t) + \varphi(\theta_t)) + f_{min} \right), \quad (18)$$

avec $\lambda^+, \lambda^- \geq 0$. D'après les conditions de KKT, la solution optimale $\varphi(\theta_t)^*$ satisfait :

$$\frac{d}{d\varphi(\theta_t)} L(\varphi(\theta_t), \lambda^*, \lambda^-) = 0, \quad (19)$$

$$\lambda^+ \left(f_c (\sin(\theta_t) + \varphi(\theta_t)) - f_{min} \right) = 0 \quad (20)$$

$$-\lambda^- \left(f_c (\sin(\theta_t) + \varphi(\theta_t)) + f_{min} \right) = 0 \quad (21)$$

Les équations (20) et (21) impliquent que pour $\lambda^+ > 0$ ou $\lambda^- > 0$ (les deux contraintes ne peuvent pas être atteintes en même temps), on a $\varphi(\theta_t)^*$ égal à :

$$\frac{f_{min}}{f_c} - \sin(\theta_t) \text{ si } \lambda^+ > 0; -\frac{f_{min}}{f_c} - \sin(\theta_t) \text{ si } \lambda^- > 0 \quad (22)$$

Dans le cas $\lambda^+ = \lambda^- = 0$, les contraintes permettent de résoudre plus facilement (19) :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\varphi(\theta_t)} L(\varphi(\theta_t), \lambda^+, \lambda^-) = 0 \\ \Rightarrow & \frac{1}{4B} \left[-2f_c \sin(\theta_t) \ln(f) - 2\frac{f_c^2}{f} (\sin(\theta_t) + \varphi(\theta_t)) \right]_{f_{min}}^{f_{max}} = 0, \end{aligned} \quad (23)$$

qui nous donne :

$$\varphi(\theta_t)^* = \sin(\theta_t) \ln \left(\frac{f_{max}}{f_{min}} \right) \frac{f_{max} f_{min}}{f_{max} - f_{min}} \frac{1}{f_c} - \sin(\theta_t) \quad (24)$$

□

La résolution des conditions de KKT nous donne le $\varphi(\theta_t)$ optimal

$$\varphi(\theta_t)^* = \begin{cases} \tilde{\varphi} = \sin(\theta_t) \ln \left(\frac{f_{max}}{f_{min}} \right) \frac{f_{max} f_{min}}{f_{max} - f_{min}} \frac{1}{f_c} - \sin(\theta_t) \\ \text{si } -1 \leq \frac{f_c}{f_{min}} (\sin(\theta_t) + \tilde{\varphi}) \leq 1 \\ \text{sign}(\sin(\theta_t)) \frac{f_{min}}{f_c} - \sin(\theta_t) \text{ sinon} \end{cases} \quad (25)$$

En injectant $\varphi(\theta_t)^*$ dans l'équation (12), et en notant

$$\tilde{f}_0 = \ln \left(\frac{f_{max}}{f_{min}} \right) \frac{f_{max} f_{min}}{f_{max} - f_{min}} \quad (26)$$

nous obtenons :

$$\beta_n(\theta)^* = \begin{cases} \tilde{\beta} = \frac{2\pi d}{c} (n-1) \tilde{f}_0 \sin(\theta_t) \\ \text{si } \tilde{f}_0 |\sin(\theta_t)| \leq f_{min} \\ \frac{2\pi d}{c} (n-1) \frac{f_{min}}{|\sin(\theta_t)|} \sin(\theta_t) \text{ sinon} \end{cases} \quad (27)$$

Par identification, cette écriture correspond à modifier la fréquence f_c en une fréquence optimale f_0^* telle que :

$$f_0^* = \begin{cases} \tilde{f}_0 = \ln \left(\frac{f_{max}}{f_{min}} \right) \frac{f_{max} f_{min}}{f_{max} - f_{min}} & \text{si } \tilde{f}_0 |\sin(\theta_t)| \leq f_{min} \\ \frac{f_{min}}{|\sin(\theta_t)|} & \text{sinon} \end{cases} \quad (28)$$

Cette fréquence vérifie

$$f_{min} \leq \tilde{f}_0 \leq f_c, \quad (29)$$

avec une égalité $f_0 = f_c$ lorsque $B \ll f_c$. Dans la suite du papier, nous appelons cette méthode la méthode adaptée.

5 Simulations

Nous évaluons dans cette section l'impact du choix de la fréquence f_0 sur la déviation d'angle moyenne et le gain moyen. Pour une comparaison équitable, les différentes méthodes sont évaluées sur la même bande passante $[f_{min}; f_{max}]$. Dans nos simulations, la fréquence centrale est fixée à $f_c = 300$ GHz avec une bande passante $B = 30$ GHz et $N = 100$ antennes, comme dans [5].

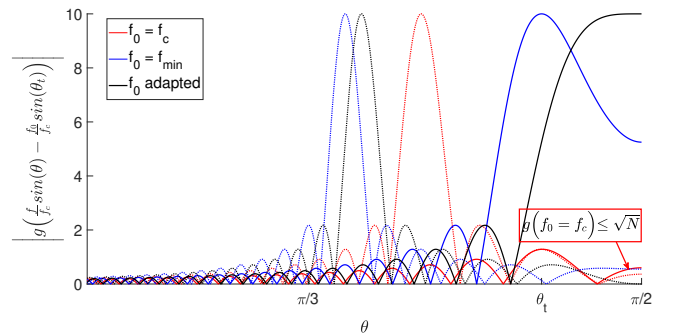


FIGURE 2 : Gain d'antenne en fonction de θ pour $B = 30$ GHz, $f_c = 300$ GHz, $N = 100$ et $\theta_t = 0.45\pi$ rad pour des fréquences f fixes. Les rayons représentant f_{max} sont en pointillés tandis que ceux représentant f_{min} sont pleins.

5.1 Impact sur la bande

La Fig. 2 représente le gain d'antenne $|g(x)|$ en fonction de l'angle θ pour $\theta_t = 0.45\pi$ plus grand que $\left| \arcsin\left(\frac{f_{min}}{f_c}\right) \right|$. Pour un θ_t plus grand que $\left| \arcsin\left(\frac{f_{min}}{f_c}\right) \right|$, la méthode classique n'est pas capable d'atteindre le gain maximal \sqrt{N} pour $f < f_c |\sin(\theta_t)|$ car le gain optimal $\theta^* = \arcsin\left(\frac{f}{f_c} \sin(\theta_t)\right)$ n'est pas défini (rayon en rouge à droite de la Fig. 2). Les deux autres méthodes peuvent atteindre ce gain maximal, mais la méthode adaptée permet d'avoir moins de déviation d'angle $\langle \Delta\theta(0) \rangle$ et donc moins de dépointage de faisceaux.

5.2 Impact sur le gain

Dans cette section, nous évaluons l'impact du choix de f_0 sur le gain moyen noté $\langle g \rangle$ qui est égal à l'intégrale du gain sur la bande B pour $\theta = \theta_t$, et qui correspond au gain dans la direction θ_t . La Table 1 représente les résultats de simulations pour $B = 30$ GHz, $f_c = 300$ GHz, $N = 100$ et différents θ_t . Le tableau contient également la déviation d'angle $\langle \Delta\theta(0) \rangle$, qui impacte le gain moyen (voir Fig. 1). Le nombre d'antennes N , n'a aucun impact sur la déviation d'angle, mais impacte tout de même le gain moyen. En effet, augmenter N réduit la largeur des lobes du gain, ce qui entraîne une plus grosse perte de gain à cause du dépointage de faisceaux.

TABLE 1 : Déviation d'angle moyen et gain moyen pour $B = 30$ GHz, $f_c = 300$ GHz, $N = 100$ et $\theta = \theta_t$

$\theta = \theta_t$	0.1 π		
f_0	f_c and [7]	f_{min}	f_0^*
$\langle \Delta\theta(0) \rangle$	8.959×10^{-6}	3.373×10^{-5}	8.925×10^{-6}
$\langle g \rangle$	7.252	4.378	7.246
$\theta = \theta_t$	0.3 π		
f_0	f_c and [7]	f_{min}	f_0^*
$\langle \Delta\theta(0) \rangle$	1.634×10^{-4}	5.404×10^{-4}	1.612×10^{-4}
$\langle g \rangle$	3.598	2.146	3.601
$\theta = \theta_t$	0.45 π		
f_0	f_c and [7]	f_{min}	f_0^*
$\langle \Delta\theta(0) \rangle$	Non défini	4.149×10^{-3}	3.089×10^{-3}
$\langle g \rangle$	3.108	1.848	2.767

Les résultats montrent que la méthode avec la fréquence f_0 à gauche se fait surclasser par les deux autres méthodes. La méthode adaptée permet bien d'atteindre la meilleure déviation d'angle tout en ayant un gain moyen similaire à la méthode classique pour θ_t égal à 0.1 π et 0.3 π . Notre méthode ne permet cependant pas de dépasser significativement la méthode classique en terme de gain moyen. Cependant, en augmentant B/f_c , comme la fréquence f_0 s'éloigne de f_c , les performances de notre méthode augmenteront (en terme de $\langle \Delta\theta(0) \rangle$). La méthode apporte une légère amélioration en gain moyen pour $\theta_t = 0.3\pi$. Lorsque $\theta_t = 0.45\pi$, $\left| \frac{f_c}{f} \sin(\theta_t) \right| > 1$ n'est vrai que pour une fraction de la bande, et donc $x = 0$ n'a pas de solution sur le reste de la bande (le gain maximal \sqrt{N} ne peut donc pas être atteint sur cette partie de la bande). Pour ces fréquences, θ^* ne peut pas satisfaire $x = 0$ donc la déviation d'angle moyenne $\langle \Delta\theta(0) \rangle$ ne peut pas être calculée. La méthode classique atteint cependant un meilleur gain moyen pour $\theta_t = 0.45\pi$.

6 Conclusions et Perspectives

Nous avons proposé une méthode permettant d'optimiser la fréquence des déphaseurs f_0 pour minimiser la déviation d'angle due au dépointage de faisceaux. Nous avons obtenu une expression analytique simple appelée fréquence de déphasage adaptée. La méthode proposée possède un coût de calcul négligeable comparé à l'optimisation numérique et diminue légèrement la déviation d'angle. Bien que les résultats ne montrent pas d'amélioration significative du gain dans la direction θ_t , la méthode proposée ouvre la voie en montrant que choisir $f_0 = f_c$ pour les déphaseurs n'est plus la seule solution en large bande (contrairement au cas bande étroite).

Pour améliorer la méthode proposée, il serait intéressant d'optimiser la fréquence en fonction du gain moyen.

Références

- [1] S. BOYD et L. VANDENBERGHE : Convex optimization. <https://web.stanford.edu/~boyd/cvxbook/>, 2004.
- [2] Mingming CAI, Kang GAO, Ding NIE, Bertrand HOCHWALD, J. Nicholas LANEMAN, Huang HUANG et Kunpeng LIU : Effect of wideband beam squint on codebook design in phased-array wireless systems. *In IEEE Globecom*, 2016.
- [3] Guillem FEMENIAS et Felip RIERA-PALOU : Wideband cell-free mmwave massive mimo-ofdm : Beam squint-aware channel covariance-based hybrid beamforming. *IEEE Tr on Wireless Communications*, 2021.
- [4] Hardy HALBAUER et Thorsten WILD : Towards power efficient 6G sub-THz transmission. *In EuCNC/6G Summit*, 2021.
- [5] Nhan Thanh NGUYEN, Joonas KOKKONIEMI et Markku JUNTTI : Beam squint effects in THz communications with UPA and ULA : Comparison and hybrid beamforming design. *In 2022 IEEE Globecom Workshops*.
- [6] S. J. ORFANIDIS : Electromagnetic waves and antennas. <https://www.ece.rutgers.edu/~orfanidi/ewa/>, 2016.
- [7] Sungwoo PARK, Jeonghun PARK, Ali YAZDAN et Robert W. HEATH : Exploiting spatial channel covariance for hybrid precoding in massive mimo systems. *IEEE Tr on Signal Processing*, 2017.
- [8] H.L. VAN TREES : *Optimum Array Processing : Part IV of Detection, Estimation, and Modulation Theory*. Detection, Estimation, and Modulation Theory. Wiley, 2004.
- [9] Qijiang YUAN, Hui LIU, Mingfeng XU, Yezeng WU, Lixia XIAO et Tao JIANG : Deep learning-based hybrid precoding for terahertz massive MIMO communication with beam squint. *IEEE Communications Letters*, 2023.